

Prova tipo B

Duração: 1 hora 45 minutos

P2 de Álgebra Linear I – 2004.2

Data: 8 de outubro de 2004.

Nome: _____ Matrícula: _____
Assinatura: _____ Turma: _____

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	2.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	1.0		
3a	1.0		
3b	0.5		
3c	0.5		
4a	1.0		
4b	0.5		
5a	1.0		
5b	0.5		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear os cadernos (prova e rascunho).
- **Verifique, revise e confira** cuidadosamente suas respostas.
- **Respostas a caneta.** Escreva de forma clara e legível.
- V. somente deverá entregar este caderno. Faça os cálculos das questões 1, 2 e 3 nas folhas de rascunho.
- Nas questões 4 e 5 justifique de forma clara, ordenada e completa suas respostas. Respostas sem justificar não serão consideradas.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

Atenção: responda **todos** os itens, use "N= não sei" caso você não saiba a resposta.

- Cada resposta certa vale 0.4.
- Cada resposta N vale 0.
- Respostas confusas e ou rasuradas serão contabilizadas como erradas.
- A pontuação das respostas erradas segue a seguinte tabela progressiva:

Núm. questões erradas	1	2	3	4	5
Pontos negativos	0	0.3	0.8	1.4	2.0

Marque com caneta no quadro abaixo as respostas

Não é necessário justificar

Itens	V	F	N
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			

1.a) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação afim

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(v) = L(v) + b,$$

onde L é uma transformação linear inversível, $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e b é um vetor de \mathbb{R}^2 .

Então T é inversível e sua inversa é

$$T^{-1} = L^{-1} - b.$$

1.b) Seja M uma matriz quadrada 2×2 tal que

$$M^2 = M \circ M = M.$$

Então, pelas propriedades dos determinantes

$$\det(M^2) = \det(M \circ M) = \det(M) \det(M) = \det(M),$$

onde $\det(M)$ denota o determinante de uma matriz quadrada M . Simplificando, (dividindo por $\det(M)$),

$$\det(M) = 1 \neq 0,$$

portanto M tem inversa.

1.c) Existe uma única transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, 0, 1) = (2, 1, 1), \quad T(0, 1, 1) = (3, 1, 1), \quad T(2, 2, 4) = (10, 4, 4).$$

1.d) Considere o vetor $(1, 1, 1)$ e a transformação

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times (1, 1, 1) + v \times v.$$

A transformação T é linear.

1.e) Considere os vetores de \mathbb{R}^3

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (2, 1, a), \quad v_3 = (3, 1, a).$$

Os vetores v_1 , v_2 e v_3 são sempre linearmente independentes, independentemente do valor de $a \in \mathbb{R}$.

2)

(a) Considere a base β de \mathbb{R}^3

$$\beta = \{(1, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 1, 0)\}$$

Determine as coordenadas $(v)_\beta$ do vetor $v = (4, 3, 3)$ na base β .

(b) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de \mathbb{R}^3 . Considere a nova base de \mathbb{R}^3

$$\delta = \{u_2 + u_3, u_3 + u_1, u_1 + u_2\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(w)_\alpha = (3, 2, 3),$$

determine as coordenadas $(w)_\delta$ de w na base δ .

(c) Determine k para que os vetores

$$\{(2, 1, 1); (k, 2, 1); (3, k, k)\}$$

não formem uma base de \mathbb{R}^3 .

Somente respostas. Marque as respostas a caneta nos retângulos

a)

$$(v)_\beta =$$

b)

$$(w)_\delta =$$

c)

$$k =$$

3) Considere o vetor $(1, 3, 2)$ e a transformação linear

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times (1, 3, 2).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine (explicitamente) dois vetores não nulos e diferentes u e w de \mathbb{R}^3 tais que

$$T(u) = T(w) \neq \bar{0}.$$

(c) Determine a equação cartesiana da imagem de T (denotada $\text{im}(T)$).
Lembre que

$$\text{im}(T) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(w) = u\}.$$

Somente respostas. Marque as respostas a caneta nos retângulos

a)

$$[T] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

b)

$u =$

$w =$

c)

$\text{im}(T):$

4)

(a) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sejam $B = A^2$ e C a matriz inversa de B , (isto é $C = B^{-1}$). Suponha que

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Determine o coeficiente $c_{1,3}$ da matriz C .

Justifique de forma clara, ordenada e completa sua resposta

Resposta:

(5) Considere a reta r de \mathbb{R}^2 de equação cartesiana

$$r: y = 5x + 1$$

e o vetor $(1, 1)$.

Considere a transformação afim T *projeção na reta r na direção do vetor v* , que associa ao vetor $w = \overline{OP}$ o vetor $T(w) = \overline{OQ}$, onde Q é a interseção da reta r e da reta s que contém o ponto P e é paralela ao vetor $v = (1, 1)$.

(a) Determine a parte linear L_T de T .

(b) Determine a forma matricial de T .

Justifique de forma clara, ordenada e completa sua resposta
--

Resposta: