P2 de Álgebra Linear I – 2011.1

7 de maio de 2011.

Nome:____ Matrícula:__________
Assinatura:______________________________________ Turma:_____________

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma).

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO. Provas com os campos matrícula, assinatura e turma não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Q	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**3.a**	**3.b**	**3.c**	**4.a**	**4.b**	**soma**
V	1.0	1.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	0.5	10.0
N												

Instruções – leia atentamente

• Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.

• É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.

• O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta**. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!**.

• Escreva de forma clara e legível. Justifique de forma **ordenada** e **cuidadosa** suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.* fonte: mini-Aurélio

1)

a) Considere os planos de equações cartesianas

$$\pi_1\colon x + y + z = 1, \qquad \pi_2\colon x + y + z = 4.$$

Determine a equação cartesiana do plano ρ que é equidistante dos planos π_1 e π_2 (isto é, a distância entre os planos π_1 e ρ é igual à distância entre os planos π_2 e ρ e as distâncias entre estes três planos são todas diferentes de zero).

b) Considere as retas de equações paramétricas

$$r_1 = (1 + t, 2 + t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$r_2 = (2\,t, 1 + t, a), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine, **todos** os valores de a para que a distância entre as retas r_1 e r_2 seja $\sqrt{5}$. Se não existir nenhum valor de a tal que a distância seja $\sqrt{5}$ justifique claramente o porquê.

c) Considere o ponto $P = (0, 0, 0)$. Determine o ponto da reta r_1 do item (b) mais próximo de P.

Resposta:

2) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 2), \quad v_3 = (1, 3, 0).$$

As coordenadas destes vetores estão escritas na base canônica.

(a) Determine a equação cartesiana do subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3.

(b) Considere o vetor w cujas coordenadas na base canônica são $w = (2, 1, 5)$. Determine uma base γ do subespaço $\mathbb{W}$ formada com vetores do conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ e as coordenadas do vetor w na base γ.

(c) Considere o vetor $v_4 = (a, b, c)$ (escrito na base canônica), a base de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{v_1, v_2, v_4\}$$

e o vetor $v = (1, 1, 1)$ (escrito na base canônica). Sabendo que as coordenadas de v na base β são $(v)_\beta = (1, 1, 1)$ determine os valores de a, b e c.

Resposta:

3) Lembre que a imagem de uma transformação linear $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é definida como

$$\text{imagem}(S) = \{w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } v \in \mathbb{R}^3 \ \text{ tal que } w = S(v)\}$$

a) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & c \\ 2 & b & d \end{pmatrix}.$$

Sabendo que a imagem de T é uma reta determine os valores de a, b, c e d.

b) Considere a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & A & C \\ 2 & B & D \end{pmatrix}.$$

Determine **explicitamente** valores A, B, C e D para que a imagem de L seja o plano de equação cartesiana

$$x + y - z = 0.$$

c) Considere a transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$M(1,1,1) = (0,1,1), \quad M(1,0,1) = (2,1,1), \quad M(0,1,1) = (0,1,1)$$

Determine a matriz de M na base canônica.

Resposta:

4) Considere as matrizes

prova A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

prova B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

prova C:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

prova D:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4/9 & 10/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -1/9 \\ c & d & 4/9 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a inversa da matriz A.

b) Sabemos que $C = B^{-1}$. Determine a, b, c e d.

Critério de correção: Um erro nos coeficientes da matriz inversa **nota 1.0**, dois erros **nota 0.5**, três ou mais erros **nota zero**. O desenvolvimento da questão é necessário. Um erro em qualquer dos valores a, b, c e d **nota zero**.

Escreva as respostas finais a caneta no retângulo.

Somente serão aceitas respostas a caneta.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$d =$$

Resposta (desenvolvimento):