P2 de Álgebra Linear I – 2009.1

8 de Maio de 2009.

1) Considere a reta de equações paramétricas

$$r\colon (1+2t,\, t\,, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}$$

e os planos de equações cartesianas

$$\pi\colon 3x+y-5z=4, \qquad \varrho\colon 3x+y-5z=2.$$

(a) Ache o ponto P da reta r que está mais próximo do ponto $Q=(-1,0,0)$ e determine a distância entre eles.

(b) Determine a distância entre o ponto Q e a reta r.

(c) Ache a distância entre os planos π e ϱ.

---

2) Responda as questões a seguir.

(a) Determine, se possível, a para que o vetor $\overrightarrow{v} = (1, a, -a)$ seja combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u_1} = (2,1,1)$ e $\overrightarrow{u_2} = (0,1,1)$.

(b) Considere uma base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$$

e os vetores

$$\overrightarrow{w}_1 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3, \quad \overrightarrow{w}_2 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_3, \quad \overrightarrow{w}_3 = \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3.$$

Determine se

$$\gamma = \{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_3\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Considere a base η de $\mathbb{R}^3$

$$\eta = \{(1,1,0); (1,0,1); (0,1,1)\}$$

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_\eta$ do vetor $\overrightarrow{v} = (4,2,0)$ na base η.

(d) Considere o vetor $\overrightarrow{w}$ cujas coordenadas na base η são $(w)_\eta = (4,2,0)$. Determine as coordenadas de $\overrightarrow{w}$ na base canônica.

(e) Considere o subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$\overrightarrow{v}_1 = (1,2,1), \quad \overrightarrow{v}_2 = (1,-1,2)$$

e sua base

$$\alpha = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}.$$

Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$ de $\mathbb{W}$ na base α.

---

3) Considere os vetores

$$\overrightarrow{u}_1 = (1,1,1), \qquad \overrightarrow{u}_2 = (1,0,1), \qquad \overrightarrow{u}_3 = (0,1,0)$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1)\,\overrightarrow{u}_1 + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_2)\,\overrightarrow{u}_2 + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_3)\,\overrightarrow{u}_3.$$

(a) Determine $T(x,y,z)$ e a matriz de T (na base canônica).

(b) Determine, se possível, dois vetores diferentes $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ tais que

$$T(\overrightarrow{v}) = T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}_1.$$

(c) Determine uma base β da imagem de T (denotada $T(\mathbb{R}^3)$). Lembre que

$$T(\mathbb{R}^3) = \{\overrightarrow{e} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{e}\}.$$