P2 de Álgebra Linear I – 2003.1

Data: 12 de maio de 2003.

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	3.0		
2a	0.5		
2b	0.5		
2c	1.0		
3d	0.5		
3a	0.5		
3b	0.5		
3c	1.0		
4a	0.5		
4b	0.5		
4c	0.5		
4d	0.5		
4e	0.5		
4f	0.5		
Total	10.5		

Marque no quadro as respostas da primeira questão. Não é necessário justificar esta questão.

ATENÇÃ0: resposta errada vale ponto negativo!, a questão pode ter nota negativa!

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "N= não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			
1.f			
1.g			
1.h			
1.i			
1.j			

1.a) Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma a parábola $y = x^2$ na reta $y = x$.

1.b) Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma a reta $y = x$ na parábola $y = x^2$.

1.c) Se v_1 e v_2 são vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ então $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.d) Se $\{v_1, v_2\}$ é uma base do plano $ax + by + cz = 0$ então $\{v_1, v_2, v_3\}$, $v_3 = (a, b, c)$, é uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.e) Seja T uma transformação linear, $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que leva o plano $x + y + z = 0$ na reta $(t, -t, t)$, então $\{T(\mathbf{i}), T(\mathbf{j}), T(\mathbf{k})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.f) Seja T uma transformação linear, $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que o determinante de T é não nulo, então $\{T(\mathbf{i}), T(\mathbf{j}), T(\mathbf{k})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.g) Existe um espelhamento E de $\mathbb{R}^3$ que transforma o vetor $(2, 1, 2)$ no vetor $(1, 2, -2)$.

1.h) Considere vetores v, y e w de $\mathbb{R}^3$ linearmente dependentes. Então existem números reais σ e λ tais que $v = \sigma y + \lambda w$.

1.i) Dada uma base $\beta = \{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$ considere a nova base

$$\gamma = \{u + v + w, u - v, u - w\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o vetor h cujas coordenadas na base β são $(1, 1, 1)$. Então as coodenadas de h na base γ são $(1/3, 1/3, 1/3)$.

1.j) Considere os vetores v_1 e v_2 na figura e o vetor $v = \lambda\, v_1 + \lambda\, v_2$, onde $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Então o vetor v está na região (ilimitada) R hachurada abaixo, onde r_1 e r_2 são as retas que passam pela origem e têm vetores diretores v_1 e v_2, respetivamente.

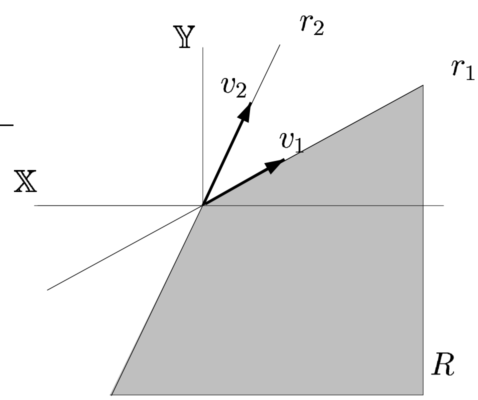

Figura 1: Questão 1.j

2)

a) Escreva o vetor $v = (1, 2)$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-2, 0)$ e $v_3 = (1, 0)$.

b) Determine os subconjuntos de $\{v_1, v_2, v_3\}$ que são base de $\mathbb{R}^2$.

c) Encontre uma base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que o vetor $(1, 2, 3)$ tenha coordenadas $(1, 1, 1)$ na base β. Mostre que o conjunto β encontrado é de fato uma base.

d) Considere o conjunto $\mathbb{X}$ de vetores $v = (a, b, c)$ cujas coordenadas são solucão do sistema

$$x + y = 1, \quad z = 0,$$

isto é, $a + b = 1$ e $c = 0$. Encontre vetores v_1 e v_2 tais que o conjunto gerado por v_1 e v_2 contenha o conjunto $\mathbb{X}$.

3) Considere o vetor $u = (1, 1, 1)$ e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(v) = v \times u - v,$$

a) Determine a matriz de T.

b) Determine a fórmula de T.

c) Estude se T é inversível e em caso afirmativo, determine a matriz inversa de T.

4) Considere o plano $\pi\colon x - y - z = 0$ e o vetor $v = (1, 0, 0)$.

(a) Determine $P_{\pi,\mathbf{i}}((1, 0, 0))$, $P_{\pi,\mathbf{i}}((0, 1, 0))$ e $P_{\pi,\mathbf{i}}((0, 0, 1))$, isto é, as imagens dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ pela projeção no plano $\pi\colon x - y - z = 0$ na direção do vetor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$.

(b) Determine a matriz de $P_{\pi,\mathbf{i}}$.

Considere a matriz

$$P_{\rho,w} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que representa a projeção no plano $\rho\colon x + y + z = 0$ na direção do vetor $w = (1, 1, 0)$.

(c) Encontre, se possível, um vetor v tal que $|P_{\rho,w}(v)| > |v|$, caso seja impossível justifique por quê não existe dito vetor.

(d) Determine a matriz da transformação linear $T = P_{\rho,w} \circ P_{\pi,\mathbf{i}}$.

(e) Verifique que

$$T(1,1,0) = T(1,0,0) = (0,0,0) \quad \text{e} \quad T(0,1,-1) = (0,1,-1).$$

Para isto v. não necessita calcular explicitamente a matriz de T.

(f) Interprete geometricamente a transformação linear T.