P3 de Álgebra Linear I – 2012.2

1 de dezembro de 2012.

Gabarito

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é :

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 31 & 2 & 5 \\ 2 & 34 & 10 \\ 5 & 10 & 55 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que **todos** os vetores do plano

$$x + 2y + 5z = 0$$

são autovetores de T:

a) Determine **todos** os autovalores de T.

Como a matriz é simétrica, o vetor normal do plano de auovetores $x + 2y + 5z = 0$ é um autovetor de T. Escolhemos o vetor normal $(1, 2, 5)$ e observamos que

$$\begin{pmatrix} 31 & 2 & 5 \\ 2 & 34 & 10 \\ 5 & 10 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Logo 60 é um autovalor de T.

Escolhemos o vetor do $(-2, 1, 0)$ do plano de autovetores $x + 2y + 5z = 0$ e observamos que

$$\begin{pmatrix} 31 & 2 & 5 \\ 2 & 34 & 10 \\ 5 & 10 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo 30 é um autovalor de T. Assim, usando o traço, temos que 30 é o outro autovalor de T (isto é, 30 tem multiplicidade 2). Portanto, os autovalores de T são 60 (simples) e 30(duplo).

b) Calcule o determinante de $[T]_\varepsilon$.

O determinante de T é igual ao produto dos seus autovalores (contados com multiplicidades), logo:

$$\det([T]_\varepsilon) = 30 \cdot 30 \cdot 60 = 54000$$

c) Determine uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

A matriz T possui uma base ortogonal de autovetores pois é simétrica. Portanto, os autovetores associados a 30 são perpendiculares aos autovetores associados a 60. Os autovetores associados a 03 pertencem ao plano $x + 2y + 5z = 0$. Um autovetor associado a 30 é $(2, -1, 0)$. Um autovetor associado a 60 é $(1, 2, 5)$. Outro autovetor associado a 30 (ortogonal aos anteriores) é

$$\bar{u} = (2, -1, 0) \times (1, 2, 5) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-5, -10, 5).$$

Podemos escolher $(-1, -2, 1)$.

Portanto, uma base ortonormal β formada por autovetores de T é

$$\left\{ \left(1/\sqrt{30}, 2/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}\right), \left(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0\right), \left(- 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right) \right\}.$$

d) Determine explicitamente a matriz M de mudança de base da base canônica para a base β. Determine a primeira coordenada do vetor $\vec{u} = (1, 2, 0)$ (este vetor está escrito na base canônica) na base β.

Pelo item anterior matriz P de mudança de base β para a canônica) é uma matriz ortogonal cujas colunas são autovetores de T (com a ordem correspondente). Assim a matriz procurada é

$$M = P^{-1} = P^t.$$

Portanto,

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, se as coordenadas $(\vec{u})_\beta = (m_1, m_2, m_3)$ temos que

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$m_1 = (1, 2, 0) \cdot (1/\sqrt{30}, 2/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}) = 5/\sqrt{30}.$$

e) Determine se existe uma base γ onde a matriz de T nessa base seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{pmatrix}.$$

Não existe tal base γ. Pois a matriz considerada é uma matriz diagonal. Nesse caso diagonal dessa matriz corresponderiam aos autovalores de T, mas 31 (por exemplo) não é autovalor de T.

f) Determine se existe uma base η onde a matriz de T nessa base seja

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 60 & 1 & 0 \\ 1 & 34 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Não existe a base η. Pois a matriz na base η, ($[T]_\eta$) seria semalhante a matriz na base canônica ($[T]_\varepsilon$). Logo

$$\text{traço}([T]_\varepsilon) = \text{traço}([T]_\eta)$$

Obeservamos que os traços são diferentes (traço$[T]_\varepsilon$) $= 120$ e traço$([T]_\eta) = 99$.

---

2) Considere o plano

$$\pi : x - z = 0$$

e as transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ espelhamento no plano π e
$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projeção ortogonal no plano π. Lembre que

- $T(\bar{u}) = \bar{u}$ se $\bar{u}$ pertence a π e $T(\bar{w}) = -\bar{w}$ se $\bar{w}$ é perpendicular a π,
- $P(\bar{u}) = \bar{u}$ se $\bar{u}$ pertence a π e $P(\bar{w}) = \bar{0}$ se $\bar{w}$ é perpendicular a π.

Denotaremos por $[T]_\varepsilon$ e $[P]_\varepsilon$ as matrizes de T e P na base canônica, respetivamente.

a) Determine explicitamente matrizes S, S^{-1}, D e E tais que

$$[T]_\varepsilon = S\,D\,S^{-1} \quad \text{e} \quad [P]_\varepsilon = S\,E\,S^{-1},$$

onde S é ortogonal e D e E são diagonais.

Observe que

$$\{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

é uma base ortonormal formada por autovetores de T e P.

Temos que S é uma matriz ortogonal cujas colunas são formadas por autovetores de T e P (observe que estas transformações compartilham os autovetores) e D e E são matrizes diagonais (formadas por autovalores). Logo:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$S^{-1} = S^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Determine a primeira coluna de $[T]_\varepsilon$ na base canônica.

Usando matrizes de mudança de base temos que a primeira coluna da matriz $[T]_\mathcal{E}$ é calculado fazendo o seguinte produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1/2+1/2 & 0 & 1/2+1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2+1/2 & 0 & -1/2+1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo a primeira coluna de $[T]_{\mathcal{E}}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Determine a terceira coluna de $[P]_{\varepsilon}$ na base canônica.

Usando matrizes de mudança de base temos que a terceira coluna da matriz $[P]_{\mathcal{E}}$ é calculado fazendo o seguinte produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Logo a terceira coluna de $[P]_{\mathcal{E}}$ é

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

d) Encontre, se possível, uma base β tal que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considere a base β

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\},$$

A matriz na base β nos fornece:

$$\begin{aligned}
(T_\varepsilon(\overrightarrow{u}_1))_\beta &= 1\overrightarrow{u}_1 + 0\overrightarrow{u}_2 + 0\overrightarrow{u}_3, \\
(T_\varepsilon(\overrightarrow{u}_2))_\beta &= 0\overrightarrow{u}_1 + 1\overrightarrow{u}_2 + 1\overrightarrow{u}_3, \\
(T_\varepsilon(\overrightarrow{u}_3))_\beta &= 0\overrightarrow{u}_1 + 0\overrightarrow{u}_2 - 1\overrightarrow{u}_3.
\end{aligned}$$

Logo os vetores $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_3$ são autovetores da transformação T associado aos autovalores 1 e -1, respectivamente. Assim a base β é da forma:

$$\beta = \{(1,0,1), (x,y,z), (1,0,-1)\},$$

Teremos então:

$$(T_\varepsilon(x,y,z))_\beta = 0\,(1,0,1) + 1\,(x,y,z) + 1\,(1,0,-1)$$

Usando a matriz $[T]_\beta$ obtemos

$$(z,y,x) = (x,y,z) + (1,0,-1), \qquad z = x+1,\ y = y.$$

Podemos escolher então a base β:

$$\beta = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,0,-1)\}\,,$$

e) Determine os autovalores e o traço da transformação linear $T^8 - 3T^2$.

O cálculo dos autovalores e do traço são independentes da base escolhida. Escreveremos T na base de autovetores onde T é a matriz diagonal $[D]$ do primeiro item.

$$[D] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$[D^{2\,n}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [D^{2\,n+1}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$[D^8] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$-3\,[D^2] = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

Somando temos

$$[D^8] - 3\,[D^2] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o único autovalor é -2 (com multiplicidade 3) e o traço é -6

f) Determine as matrizes de $[T]_\varepsilon^{100}$ e $[T]_\varepsilon^{101}$ na base canônica.

Pelo primeiro item temos que:

$$[T]_\varepsilon = [S]\,[D]\,[S^{-1}]$$

Portanto

$$[T]_\varepsilon^{100} = [S]\,[D]^{100}\,[S^{-1}].$$

Como $[D]^{100} = \mathrm{id}$ (lembre do item anterior) temos

$$[T]_\varepsilon^{100} = [S]\,[S^{-1}] = \mathrm{Id}.$$

Agora para n ímpar teremos que $[D]^n = D$ (lembre novamente o item anterios). Logo:

$$[T]_\varepsilon^{101} = [S]\,[D]^{101}\,[S^{-1}] = [T]_\varepsilon.$$