P3 de Álgebra Linear I – 2008.2

Data: 14 de Novembro de 2008.

Gabarito.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

• Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que existem vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ que verificam

$$T(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \quad \text{e} \quad T(\overrightarrow{w}) = -\overrightarrow{w},$$

isto é, $\overrightarrow{u}$ é um autovetor associado ao autovalor 1 e $\overrightarrow{w}$ é um autovetor associado ao autovalor -1.

Então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ é um autovetor de T associado a $0 = 1 + (-1)$.

Falso. Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ fosse um autovetor de T associado a 0 teriamos

$$T(\overrightarrow{v}) = T(\overrightarrow{u}) + T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.$$

Portanto $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}$. Uma contradição, pois $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{w}$.

• Sejam A e B duas matrizes 2×2 tais que têm o mesmo traço, o mesmo determinante e o mesmo polinômico característico. Então as matrizes A e B são semelhantes.

Falso. É suficiente considerar as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrizes verificam

- traço$(A) = $ traço$(B) = 2$,
- determinante$(A) = $ determinante$(B) = 1$,
- $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2$.

A matriz A é diagonalizável (!), mas a matriz B não é diagonalizável: podemos encontrar no máximo um autovetor linearmente independente associado a 1 (vetores paralelos a $\mathbf{j}$), como 1 é o único autovalor não é possível achar uma base de autovetores de B, logo B não é diagonalizável. Portanto, B e A não são semelhantes (pois em tal caso, B seria diagonalizável!).

• Seja A uma matriz 3×3 não inversível tal que 1 e 2 são autovalores de A. Então o traço de A é 3.

Verdadeiro. Se a matriz A não é inversível o seu determinante é nulo. Como o determinante é o produto dos autovalores contados com multiplicidade, $\lambda = 0$ é necessariamente um autovalor de A. Assim obtemos três autovalores de A: $0, 1, 2$. Como a matriz é 3×3, todos os autovalores são simples. Portanto, traço$(A) = 0 + 1 + 2 = 3$.

• Seja A uma matriz 3×3 diagonalizável. Então existe a matriz inversa A^{-1} de A.

Falso. É suficiente considerar qualquer matriz diagonalizável A com um autovalor nulo. Como determinante de A é o produto dos autovalores (contados com multiplicidade), o determinante de A é zero e portanto não existe a inversa de A. Considere por exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são semelhantes.

Falso. Temos traço$(A) = 1 + 2 + 3 = 6 \neq$ traço$(B) = 0 + 2 + 0 = 2$, e matrizes semelhantes têm o mesmo traço.

Prova A

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b		x	
1.c	x		
1.d		x	
1.e		x	

Prova B

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b	x		
1.c		x	
1.d		x	
1.e		x	

Prova C

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	x		
1.b		x	
1.c		x	
1.d		x	
1.e		x	

Prova D

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b		x	
1.c		x	
1.d		x	
1.e	x		

2)

a) Considere a base ortonormal

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}\right) \right\}$$

de $\mathbb{R}^3$

Determine a primeira coordenada do vetor

$$\overrightarrow{w} = (2, 3166, 1)$$

na base β.

Observação: as coordenadas dos vetores da base β e do vetor $\overrightarrow{w}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$.

b) Determine a inversa M^{-1} da matriz M,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{-2}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

Respostas:

(a) Como a base beta é ortonormal, a primeira coordenada x de $\overrightarrow{w}$ na base β é

$$x = (2, 3166, 1) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) Observe que os vetores linha da matriz M

$$\left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}); (\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}})(\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}) \right\}$$

formam uma baser ortonormal. Portanto, a matriz M é ortogonal e a inversa M^{-1} de M a sua transposta M^t:

$$M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{-2}{\sqrt{22}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

(2.a) A primeira coordenada de $\overrightarrow{w}$ na base β é

prova tipo A:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

prova tipo B:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}$$

prova tipo C:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}$$

prova tipo D:

$$\frac{4}{\sqrt{2}}$$

(2.b) A inversa de M é

prova tipo A:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{-2}{\sqrt{22}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

prova tipo B:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}.$$

prova tipo C:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

prova tipo D:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{-2}{\sqrt{22}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

---

3) Calcule a inversa da matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Desenvolvimento. Resposta (prova tipo A):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação: linha II - 2 (linha I) e linha III - linha I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação: troca de sinal linha III e troca de linhas II e III.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

operação: linha III + 3 (linha II)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

operação: -1/5 (linha III)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

operação: linha II + linha III e linha I - linha III

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6/5 & 1/5 & -3/5 \\ 4/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

operação: linha I - 2 (linha II)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2/5 & 3/5 & 1/5 \\ 4/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 3/5 & 1/5 \\ 4/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

prova tipo A:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

prova tipo B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

prova tipo C:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

prova tipo D:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4)

a) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(v) = v \times (1,1,1).$$

Determine a matriz de T na base

$$\eta = \{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}.$$

b) Determine <u>**explicitamente**</u> duas matrizes **não** diagonalizáveis B e C **diferentes** tais que seus polinômios característicos sejam

$$p_B(\lambda) = p_C(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(C - \lambda I) = (3-\lambda)^3$$

Resposta:

(4.a) Da definição de T temos

$$T(x,y,z) = (x,y,z) \times (1,1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-z, -x+z, x-y).$$

Portanto

$$\begin{aligned} &T(1,1,1) = (0,0,0), \\ &T(1,0,-1) = (1,-2,1), \\ &T(1,-2,1) = (-3,0,3) = -3\,(1,0,-1). \end{aligned}$$

Isto é

$$\begin{aligned} &T(1,1,1) = (0,0,0) = 0\,(1,1,1) + 0\,(1,0,-1) + 0\,(1,-2,1), \\ &T(1,0,-1) = (1,-2,1) = 0\,(1,1,1) + 0\,(1,0,-1) + 1\,(1,-2,1), \\ &T(1,-2,1) = -3\,(1,0,-1) = 0\,(1,1,1) - 3\,(1,0,-1) + 0\,(1,-2,1). \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de T na base η é

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4.b) Temos que o único autovalor de B é 3. Como a matriz não é diagonalizável não pode ter uma base de autovetores. Portanto, no máximo podem existir dois autovetores linearmente independentes de B associados a 3. Escolheremos B exatamente com dois autovetores l.i. associados a 3. As opções mais simples são

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observe que este método já fornece a matriz C.

No primeiro caso, os autovetores de B (associados a 3) são os vetores não nulos do plano $x = 0$ e no segundo os vetores não nulos do plano $y = 0$.

Finalmente, se queremos escolher uma matriz C que não seja semelhante a B (isto não é necessário) é suficiente escolher uma matriz com no máximo um autovetor linearmente independente associado a 3 (isto automaticamente impede a semelhança entre B e C, pois matrizes semelhantes têm o mesmo número máximo de vetores l.i. associados ao mesmo autovalor). O caso mais simples é

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Os autovetores de C são os vetores da forma $(0, 0, t)$, $t \neq 0$.

Observe que como estamos considerando matrizes triangulares, todas as matrizes verificam as condições do enunciado.

Obviamente, existem outras respostas. Por exemplo,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

5) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Determine uma base β de autovetores de T.

b) Determine a matriz E de T na base β.

c) Encontre a matriz P de mudança de base da base de autovetores β para a base canônica.

Resposta:

(5.a) Para determinar uma base de autovetores a primeira etapa é calcular os autovalores de T:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & -4-\lambda & -2 \\ -2 & 12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (5-\lambda)\,[(-4-\lambda)\,(6-\lambda)+24] = (5-\lambda)\,[\lambda^2 - 2\,\lambda] = \\ &= \lambda\,(5-\lambda)\,(\lambda-2). \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores sã

$$\lambda = 0, \quad 5, \quad 2.$$

Observe que este resultado é compatível com o traço da matriz ser 7.

A seguir calculamos os autovetores associados a estes autovetores (obtendo assim a base β). Obteremos estes autovetores resolvendo os sistemas lineares a seguir.

Autovetores associados a 5**:**

$$\begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ 4 & -4-5 & -2 \\ -2 & 12 & 6-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos

$$4\,x - 9\,y - 2\,z = 0, \quad -2\,x + 12\,y + z = 0.$$

Conisderando a primeira mas duas vezes a segunda equação,

$$15\,y = 0.$$

Logo $z = 2\,x$.

Os autovetores associados a 5 são da forma:

$$t\,(1, 0, 2), \quad t \neq 0.$$

Autovetores associados a 2:

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 0 & 0 \\ 4 & -4-2 & -2 \\ -2 & 12 & 6-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos

$$3\,x = 0, \quad 4\,x - 6\,y - 2\,z = 0, \quad -2\,x + 12\,y + 4\,z = 0.$$

Portanto $x = 0$ e $z = -3\,y$.

Os autovetores associados a 2 são da forma:

$$t\,(0, 1, -3), \quad t \neq 0.$$

Autovetores associados a 0:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos

$$5\,x = 0 \quad 4\,x - 4\,y - 2\,z = 0, \quad -2\,x + 12\,y + 6\,z = 0.$$

Portanto $x = 0$ e $z = -2\,y$.

Os autovetores associados a 0 são da forma:

$$t\,(0, 1, -2), \quad t \neq 0.$$

Uma base de autovetores de T é:

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (1,0,2); \overrightarrow{u}_2 = (0,1,-3); \overrightarrow{u}_3 = (0,1,-2)\}.$$

(5.b) Observe que

$$T(\overrightarrow{u}_1) = 5\,\overrightarrow{u}_1, \qquad T(\overrightarrow{u}_2) = 2\,\overrightarrow{u}_2, \qquad T(\overrightarrow{u}_3) = 0\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{0}.$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5.c) Observe que a matriz P é a matriz de mudança de base da base β para a base canônica. Portanto, as colunas de matriz P são os vetores da base β:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$