$\boxed{\text{Álgebra Linear I - Lista 8}}$

Transformações lineares

Respostas

1) Estude quais transformações abaixo são transformações lineares:

- $T(x, y, z) = (x + y - 1,\, z)$,
- $T(x, y, z) = x + y - 1$,
- $T(x, y, z) = (x + y - 1,\, x - 2z, x + z,\, 0)$,
- $T(x, y, z) = (x + y,\, z)$,
- $T(x, y, z) = x + y$,
- $T(x, y, z) = (x + y,\, x - 2z,\, x + z,\, 0)\,.$

Resposta: As três primeiras não são transformações lineares, as três últimas sim.

2) Decida se a afirmaçõoes a seguir são verdadeiras ou falsas:

1. Seja $T\colon R^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação tal que para todo par de vetores v e u de $\mathbb{R}^3$ e todo par de números reais λ e σ se verifica $T(\lambda u + \sigma v) = \lambda T(u) + \sigma T(v)$, então T é uma transformação linear.
2. Seja u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$, então existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = -u$.
3. Existe uma única transformação linear tal que para todo par de vetores u e v, $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(u + v) = T(u) - T(v)$.
4. Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(u+v) = T(u) + 2T(v)$ para todo par de vetores u e v.
5. Seja u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$. Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = 2T(u)$.

6. Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (1,1)$, $T(1,1,0) = (1,1)$, $T(1,1,1) = (1,1)$.

7. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação tal que $T(\sigma\, u) = \sigma\, T(u)$ para todo vetor u de $\mathbb{R}^2$, então T é linear.

Resposta:

1. Afirmativa. Fazendo $\sigma = 1 = \lambda$ temos $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para qualquer par de vetores u e v. Fazendo $\sigma = 0$ temos $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ para qualquer vetor u e qualquer número real λ. De fato, uma aplicação é linear se e somente se verifica a condição do exercício.

2. Falso, considere as transformações lineares $T(x,y) = (-x,-y)$ e $S(x,y) = (0,-y)$. No primeiro caso, $T(u) = -u$ para qualquer vetor u. No segundo $S(0,1) = -(0,1)$.

3. Verdadeira, é a transformação linear nula: temos $T(u+u) = T(u) - T(u) = \bar{0}$, logo $2T(u) = \bar{0}$ e $T(u) = \bar{0}$, para todo vetor u

4. Verdadeira, a transformação linear também é nula: temos $T(u+u) = T(u) + 2T(u)$, logo $2T(u) = 3T(u)$ e $T(u) = \bar{0}$, para todo vetor u.

5. Verdadeira, a transformação linear também é nula (complete).

6. A afirmação é correta. Uma transformação linear definida em $\mathbb{R}^3$ está determinada pelas imagens de três vetores l.i., como é o caso. De fato, a matriz de T é

$$T(1,0,0) = (1,1), \quad T(0,1,0) = T(0,0,1) = (0,0).$$

Verifique (escreva os vetores $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$ em função da base canônica, use as propriedades das transformações lineares).

7. Falso. Considere uma função f definida do círculo unitário no plano, $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, e estenda esta função para todo o plano $\mathbb{R}^2$ obtendo uma transfromação $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ da seguinte forma, $F(u) = |u|\, f(u/|u|)$. Esta transformação verifica as hipóteses do enunciado. Mas f pode ser escolhida de forma que a transformação F resultante não seja linear.

Suponha que $f(1,0) = (5,5)$, $f(0,1) = (5,5)$ e $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (1,2)$. Se F for linear,

$$f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = F(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2)\, F(1,0) + (\sqrt{2}/2)\, F(0,1),$$

ou seja $(1,2) = \sqrt{2}(5,5)$, o que é falso.

3) Considere o conjunto de vetores $\beta = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

- Verifique que β é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- Determine as coordenadas do vetor $v = (1,2,3)$ na base β.
- Considere a aplicação S definida por

  $$S(u) = u \times (1,1,1).$$

  Estude se S é transformação linear.
- Determine os vetores u tais que $S(u) = u$.
- Determine dois vetores u e v não nulos tais que $S(u) = S(v) \neq \bar{0}$.
- Estude se S é sobrejetora (isto é, a imagem de S é $\mathbb{R}^3$). Determine a imagem de S.

Resposta: Para o primeiro item é suficiente ver que o determinante cujas colunas são os vetores da base é não nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 1(1-1) + 0(1-0) = -1 \neq 0.$$

Para determinar as coordenadas do vetor $(1,2,3)$ escrevemos

$$(1,2,3) = x(1,1,1) + y(1,0,1) + z(0,1,1).$$

Logo,

$$1 = x + y, \quad 2 = x + z, \quad 3 = x + y + z.$$

Escalonando obtemos:

$$1 = x + y, \quad 1 = -y + z, 2 = z.$$

Logo $z = 2$, $y = 1$ e $x = 0$. As coordenadas do vetor na base β são $(0, 1, 2)$

A transformação S é linear. A afirmação decorre das propriedades do produto vetorial.

Observe que $S(u)$ é ortogonal a u. Logo $S(u) = u$ se, e somente se, $u = 0$.

Para resolver o último item observe que

$$S(x, y, z) = (x, y, z) \times (1, 1, 1) = (y - z, z - x, x - y).$$

Também observe que $S(1, 1, 1) = \bar{0}$. Logo

$$S(x, y, z) = S(x, y, z) + \bar{0} = S(x, y, z) + S(1, 1, 1) = S((x, y, z) + (1, 1, 1)).$$

Logo é suficiente escolher $(1, 0, 1)$ e $(2, 1, 2)$.

Lembre que uma transformação linear T é injetora se, e somente se, $T(u) = \bar{0}$ se, e somente se, $u = \bar{0}$. No caso da transformação S,

$$S(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \times (1, 1, 1) = \bar{0},$$

portanto, S não é injetora.

Lembre que uma transformação linear T é sobrejetora se, e somente se, para todo vetor v existe u tal que $T(u) = v$. Claramente, pela definição de produto vetoria, o vetor $(1, 1, 1)$ não é imagem de nenhum vetor w, isto é,

$$S(w) = w \times (1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

pois $S(w)$ é ortogonal a w.

Outra forma de resolver o item é usar a fórmula de S,

$$S(x, y, z) = (x, y, z) \times (1, 1, 1) = (y - z, z - x, x - y).$$

Para ser injetora o sistema deveria ter somente a solução trivial. Verifique que as soluções do sistema são da forma (t, t, t), $t \in \quad R$.

Finalmente, a imagem de S é o plano $x + y + z = 0$, e portanto não é sobrejetora. Isto pode ser visto de duas formas. Primeiro fazendo os cálculos: um vetor (a, b, c) pertence à imagem se o sistema

$$y - z = a, \quad z - x = b, \quad x - y = c$$

tem solução. Escalonando obtemos:

$$x-y=c, \quad y-z=-b-c, \quad y-z=a.$$

Um novo escalonamento fornece (segunda menos terceira equações)

$$x-y=c, \quad y-z=-b-c, \quad 0=a+b+c.$$

Portanto, para o sistema ter solução (a,b,c) devem verificar a equação do plano acima.

Outra forma é geométrica: os vetores $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$, ortogonais a $(1,1,1)$ pertencem a imagem (para isto não é necessário fazer cálculos, decorre da definição de produto vetorial, complete o raciocínio). Portanto, a imagem de S contém o plano gerado por estes dois vetores que contém a origem, ou seja, $x+y+z=0$. Agora há duas possibilidades: ou a imagem é dito plano ou é todo $\mathbb{R}^3$. Como $(1,1,1)$ não está na imagem, a última opção está eliminada.

4) Considere um vetor unitário u de $\mathbb{R}^3$. Considere as transformações seguintes

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v)=(v\cdot u)\,u,$$
$$S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad S(v)=v-(v\cdot u)\,u.$$

- Estude se S e T são transformações lineares e interprete geometricamente.

- Considere o vetor $u=(1,1,1)$ e $T\colon \mathbb{R}^3 \to R^3$, definida por

  $$T(v)=(v\cdot u)\,u.$$

  Determine a forma geral de T.

- Determine o conjunto de vetores v tais que $T(v)=\bar{0}$.

- Determine se T e S são injetoras e/ou sobrejetoras. Determine as imagens de T e de S.

- Interprete T geometricamente.

Resposta: São transformações lineares. A primeira representa a projeção em u e a segunda a projeção na direção ortogonal a u.

A forma geral de T é

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

Temos que $T(v) = 0$ se e somente se v é ortogonal a u.

Portanto, T não é injetora: qualquer vetor ortogonal a u é transformado no vetor nulo.

Da definiç ao de T segue que a imagem de T é a reta de vetor diretor u contendo a origem, diferente de $\mathbb{R}^3$.

Finalmente, o significado geométrico é a projeção ortogonal na reta (t,t,t) seguida de uma multiplicação de escala 3.

5) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Sabendo que

$$T(1,0) = (2,-2) \quad \text{e} \quad T(0,1) = (0,-1),$$

- determine a forma geral de T,
- calcule $T(1,1)$, $T(2,2)$ e $T(1,2)$.
- Determine as imagens dos triângulos Δ_1 de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ e $(2,1)$, e Δ_2 de vértices $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,3)$.

Resposta: A forma geral é

$$T(x,y) = (2x, -2x-y).$$

Temos, $T(1,1) = (2,-3)$, $T(2,2) = (4,-6)$, $T(1,2) = (2,-4)$.

Os triângulos se transformam em triñgulos. Por exemplo, os vértices de $T(\Delta_1)$ são $(0,0)$, $(2,-4)$ e $(2,-5)$.

6) Estude se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades:

- $$\begin{array}{ll} T(1,0,0) = (2,2,2), & T(1,1,0) = (3,3,3), \\ T(1,1,1) = (4,4,4), & T(2,0,1) = (1,2,3). \end{array}$$
- T transforma todo vetor do plano $x+y+z=0$ no vetor nulo, a reta $(t,2t,3t)$ na reta (t,t,t) e o vetor $(1,1,1)$ no vetor $(2,2,2)$.

- T transforma todo vetor do plano $x+y+z=0$ no vetor nulo, a reta $(t,2t,3t)$ na reta (t,t,t) e o vetor $(1,1,1)$ no vetor $(1,2,3)$.

Nos casos em que a transformação linear exista dê um exemplo de tal transformação, determinando $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$.

Resposta: No primeiro caso temos que se T é linear então

$$T(0,1,0)=T(1,1,0)-T(1,0,0)=(1,1,1).$$

Da mesma forma,

$$T(0,0,1)=T(1,1,1)-T(1,1,0)=(1,1,1).$$

Portanto, deveríamos ter

$$T(2,0,1)=2T(1,0,0)+T(0,0,1)=(5,5,5)\neq(1,2,3).$$

Logo não existe tal aplicação linear.

Para o segundo caso escrevemos $(1,1,1)=s(1,2,3)+v$ onde v é um vetor do plano. Então

$$T(1,1,1)=sT(1,2,3)+T(v)=sT(1,2,3)=s(t,t,t)=(2,2,2).$$

Logo a priori é possível.

Em primeiro lugar determinemos s. Observando que $v\cdot(1,1,1)=0$ consideremos

$$(1,1,1)\cdot(1,1,1)=s(1,2,3)\cdot(1,1,1)+v\cdot(1,1,1),\quad 3=6s,\quad s=1/2.$$

Logo é suficiente fazer $T(1,2,3)=(4,4,4)$.

Se queremos determinar $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$ escrevemos

$$(1,0,0)=s(1,2,3)+(v),\quad (1,0,0)\cdot(1,1,1)=s(1,2,3)\cdot(1,1,1)+v\cdot(1,1,1).$$

Portanto,

$$1=6s,\quad s=1/6,\quad T(1,0,0)=1/6(4,4,4).$$

Analogamente,

$$(0,1,0)=s(1,2,3)+(v),\quad (0,1,0)\cdot(1,1,1)=s(1,2,3)\cdot(1,1,1)+v\cdot(1,1,1).$$

Portanto,

$$1 = 6s, \quad s = 1/6, \quad T(0,1,0) = 1/6(4,4,4).$$

Finalmente,

$$(0,0,1) = s(1,2,3) + (v), \quad (0,0,1)\cdot(1,1,1) = s(1,2,3)\cdot(1,1,1) + v\cdot(1,1,1).$$

Portanto,

$$1 = 6s, \quad s = 1/6, \quad T(0,0,1) = 1/6(4,4,4).$$

Agora só falta verificar os resultados (faça v. mesmo).

A resposta a última questão é negativa (de fato isto decorre dos raciocínios acima: $T(1,1,1)$ deve ser um vetor da forma $(a,a,a) \neq (1,2,3)$.

7) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação qua associa a cada vetor $v = (a,b)$ o vetor $T(v) = 0P$, onde P é a interseção da reta $r = \{(t,2t),\ t \in \mathbb{R}\}$ e a reta que contém ao ponto (a,b) e é paralela ao vetor $(1,1)$.

- Veja que T é uma transformação linear e determine a forma geral de $T(x,y)$.
- Determine o conjunto de vetores que se transformam no $(0,0)$.
- Escreva agora cada vetor v da forma $v = \lambda(1,1) + \mu(1,2)$. Relacione $T(v)$ e $\mu(1,2)$.

Resposta: Devemos calcular a interseção das retas $(t,2t)$ e $(a+s,b+s)$, $t,s \in \mathbb{R}$. O ponto de interseção é dado por

$$t = a + s, \quad 2t = b + s.$$

Resolvendo o sistema temos $s = b-2a$ e o ponto de interseção é $(b-a, 2b-2a)$. Logo a transformação linear é

$$T(x,y) = (y-x, 2y-2x).$$

Os vetores (x,y) que se transformam no zero são da forma $y = x$, ou seja a reta vetorial (t,t) onde $(1,1)$ é a direção de projeção.

Observe que $T(1,2) = (1,2)$. Se $v = \lambda(1,1) + \mu(1,2)$ então

$$T(v) = \lambda T(1,1) + \mu T(1,2) = \mu(1,2),$$

obtendo a relação procurada.