# Álgebra Linear I - Lista 6

## Distâncias

## Respostas

**1)** Considere a reta $r$ que passa por (1,0,1) e por (0,1,1). Calcule a distância do ponto (2,1,2) à reta $r$.

**Resposta:** $\sqrt{3}$.

**2)** Ache o ponto $P$ do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad (x, y, z) = (1 + 2t,\ t\ , 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

que está mais próximo do ponto $Q = (-1, 0, 0)$, e determine a distância entre eles. Que propriedade verificam os vetores $\overline{PQ}$ e $(2, 1 - 1)$ (o vetor diretor da reta?).

**Resposta:** Este ponto é obtido como a interseção do plano $\pi$ que contém $P = (-1, 0, 0)$ e é perpendicular à reta $r$. A equação de $\pi$ é $2x+y-z+2 = 0$. Para calcular a interseção de $r$ e $\pi$ determinamos o parâmetro $t$ em que a reta encontra o plano:

$$2(1 + 2t) + t - 1 + t + 2 = 0, \quad 6t = -3, \quad t = -1/2.$$

Ou seja, o ponto de interseção é $P = (0, -1/2, 3/2)$.

O vetor $\overline{PQ} = (2/2, -1/2, 3/2)$ tem como módulo $1/2\sqrt{14}$, que é a distância procurada.

Outro método é o seguinte. Considere um ponto qualquer $A$ da reta (por exemplo, $(1, 0, 1)$) e o vetor diretor unitário da reta ($v = 1/\sqrt{6}(2, 1, -1)$). Se $Q = (x, y, z)$ é o ponto da reta mais próximo de $P$ temos o seguinte:

$$\overline{AP} = (\overline{AP} \cdot v)v + \overline{QP}, \quad (-2, 0, -1) = -1/2(2, 1, -1) + \overline{QP}.$$

Logo,

$$Q = (x, y, z) = (-1, 0, 0) + (-1/6)(6, 3, -3) + (2, 0, 1) = (0, -1/2, 3/2).$$

Agora o exercício termina como acima.

Finalmente, os vetores $\overline{PQ}$ e $(2, 1 - 1)$ são ortogonais (faça o produto escalar!).

**3)** Encontre o ponto do plano definido por $x + 2y + 3z = 6$ mais próximo do ponto $(1, 3, 0)$. Ache a distância entre o ponto e o plano.

**Resposta:** $P = (13/14, 40/14, -3/14)$ e a distância $1/\sqrt{14}$.

**4)** Ache a distância entre os planos:

**a)** $3x + y - 5z = 4$ e $3x + y - 5z = 2$;

**b)** $2x - 4y + z = -12$ e $2x - 4y + z = 1$.

**Resposta:** Primeiro observe que se trata de planos paralelos (os vetores normais são paralelos). Observe que, caso não fossem paralelos, a distância seria necessariamente zero.

Para calcular a distância do primeiro par de planos observaremos que esta distância é igual a distañcia de qualquer ponto $P$ de $3x + y - 5z = 4$ (por exemplo $P = (1, 1, 0)$) a $3x + y - 5z = 2$. Considere o ponto $Q = (0, 2, 0)$ do segundo plano. Se $n = 1/\sqrt{35}(3, 1, -5)$ é o vetor normal unitário dos planos a distância $d$ é

$$d = |\overline{PQ} \cdot n| = |1/\sqrt{35}(-1, 1, 0) \cdot (3, 1, -5)| = 2/\sqrt{35}.$$

Para calcular a distância no segundo caso usaremos outro método. Considere um ponto $P$ em $2x - 4y + z = 1$ (por exemplo, $(0, 0, 1)$). Considere a interseção da reta que contém $P$ e é paralela a $(2, -4, 1)$ com o plano $2x - 4y + z = -12$. O ponto de interseção $Q$ verifica que a distância procurada é $|\overline{PQ}|$.

A reta procurada é $(2t, -4t, t + 1)$. A interseção ocorre quando $t$ verifica

$$2(2t) - 4(-4t) + (1 + t) = -12, \quad 4t + 16t + 1 + t = -12, \quad t = -13/21.$$

Logo

$$Q = (-26/21, 52/21, 8/21), \quad \overline{PQ} = (-26/21, 52/21, -13/21).$$

Finalmente, a distância é $(1/21)\sqrt{26^2 + 52^2 + 13^2} = 13/\sqrt{21}$.

**5)**

**a)** Ache a distância entre a reta $\{t(1,-8,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e e o plano $3x + y - 5z = 2$.

**b)** Considere o plano $\pi$ que contém aos pontos $A = (1,2,3)$ e $B = (2,3,4)$ e é paralelo à reta $r$

$$\{(x,y,z) = (1,2,4) + t(1,0,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Calcule a distância da reta $r$ ao plano $\pi$.

**Resposta:** Observe que a reta do item (a) é paralela ao planos (o vetor diretor da reta é ortogonal ao vetor normal do plano, faça o produto escalar: $(1,-8,-1)\cdot(3,1,-5) = 3-8+5 = 0$). Logo a distância da reta ao plano será igual à distância de qualquer ponto da reta ao plano (é falso que seja a distância de qualquer ponto do plano à reta).

No primeiro item, consideremos $P = (0,0,0)$. Escolha um ponto qualquer do plano, por exemplo $Q = (0,2,0)$. Então se $n = 1/\sqrt{35}(3,1,-5)$ é o vetor normal unitário do plano temos

$$d = |\overline{PQ}\cdot n| = |(0,2,0)\cdot 1/\sqrt{35}(3,1,-5)| = 2/\sqrt{35}.$$

Outro sistema é considerar a reta $s$ perpendicular ao plano desde o ponto $P$, determinar seu ponto de interseção com o plano (digamos $R$), então a distância é $|\overline{PR}|$. A equação de $s$ é $(3t, t, -5t)$. A interseção com o plano ocorre quando

$$3(3t) + t - 5(-5t) = 2, \quad t = 2/35.$$

Logo o ponto de interseção $R$ é $(6/35, 2/35, -10/35)$. Finalmente, a distância é

$$\frac{\sqrt{36+4+10}}{35} = \frac{\sqrt{140}}{35} = \frac{\sqrt{35\cdot 4}}{35} = \frac{2}{\sqrt{35}}$$

Para o item (b) veja que a equação cartesiana do plano é $\pi\colon x - 2y + z = 0$. Observe agora que a reta é paralela ao plano (caso contrário a distância seria zero): o vetor normal do plano $(1,-2,1)$ é ortogonal ao vetor diretor da reta $(1,0,-1)$ (veja que o produto escalar é nulo). Portanto, a distância da reta ao plano é a distância de qualquer ponto da reta (por exemplo, $P = (1,2,4)$) ao plano. Considere o ponto $Q = (1,2,3)$ do plano e os vetores paralelos ao plano $v = (1,0,-1)$ e $w = (1,1,1)$. Então a distância é:

$$\frac{|\overline{PQ}\cdot(v\times w)|}{||v\times w||} = \frac{|(0,0,1)\cdot(1,-2,1)|}{\sqrt{6}} = 1/\sqrt{6}.$$

**6)** Considere $r_1$ a reta que passa pelos pontos (1,0,0) e (0,2,0), e $r_2$ a reta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

Encontre a distância entre $r_1$ e $r_2$.

**Resposta:** $1/\sqrt{61}$.

**7)**

- Encontre a equação do plano cujos pontos são todos equidistantes de $A = (1,4,2)$ a $B = (0,2,-2)$. Encontre uma reta que seja equidistante dos pontos $A$ e $B$. Estude quantas possibilidades há para tal reta.
- Encontre a equação do plano que equidista dos planos $x + y + 2z = 3$ e $3x + 3y + 6z = 0$.

**Resposta:**
**Resposta:** O vetor normal do plano é $(1,2,4)$ e um ponto do mesmo é $(1/2,3,0)$ (o ponto médio do segmento $AB$). Logo a equação é $2x+4y+8z = 13$.

A reta procurada é qualquer reta contida no plano.

Para o segundo item consideremos uma reta perpendicular $r$ comum aos dois planos e calcularemos os pontos de interseção $P$ e $Q$ da reta com os planos. O plano procurado é o plano paralelo aos dois planos contendo o ponto meio $R$ do segmento $PQ$ (isto é o ponto de coordenadas $(P+Q)/2$.

Tomaremos como $r$ a reta $(t,t,2t)$. O ponto de interseção $P$ com o primeiro plano é $(1/2,1/2,2)$. O ponto de interseção com o segundo é $(0,0,0)$.

O ponto $R$ é $(1/4,1/4,1)$ e o plano $2x + 2y + 4z = 5$.

**8)** Considere as retas $r_1$ de equações paramétricas

$$x = 1+t, \quad y = 1+2t, \quad z = 1+2t, \quad t \in \mathbb{R}$$

e $r_2$ cujas equações cartesianas são

$$y - z = 0, \quad 2\,x - y = 2.$$

**a)** Calcule a distância entre as retas $r_1$ e $r_2$.

**b)** Determine, se possível, um ponto $P$ da reta $r_2$ tal que a distância entre $P$ e $r_1$ seja $1/3$.

**c)** Considere os pontos $A = (1,1,1) \in r_1$ e $B = (2,2,2) \in r_2$. Determine um ponto $C$ de $r_1$ tal que o triângulo de vértices $A, B, C$ seja retângulo.

**Resposta:** Primeiro determinaremos as equações paramétricas de $r_2$ observe que um vetor diretor de $r_2$ é $(0,1,-1) \times (2,-1,0) = (-1,-2,-2)$. Portanto, podemos consiserar o vetor $(1,2,2)$. Observe que um ponto da reta é $(1,0,0)$. Logo as equações paramétricas de $r_2$ são:

$$x = 1 + t, \quad y = 2\,t, \quad z = 2\,t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Outra possibilidade é resolver o sistema escolhendo $z = t$ como parámetro. Temos $y = z = t$ e $x = 1 + t/2$, $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$x = 1 + t/2, \quad y = t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O ponto $P$ da reta $r_1$ mais próximo de $Q \in r_2$ é a interseção de $r_1$ e o plano $\rho$ que contém o ponto $Q = (1,0,0)$ e é ortogonal à reta $r_1$. Observe que um vetor normal ao plano $\rho$ é o vetor diretor da reta $r_1$, ou seja $(1,2,2)$. Portanto, a equação cartesiana de $\rho$ é da forma

$$\rho\colon x + 2\,y + 2\,z = d,$$

onde $d$ é obtido da condição $Q \in \rho$, ou seja,

$$\rho\colon x + 2\,y + 2\,z = 1 + 0 + 0 = 1 = d.$$

A distancia entre $r_1$ e $r_2$ é o módulo do vetor $\overline{PQ}$ (que deve necessariamente ser ortogonal ao vetor diretor da reta). Para calcular $r_1 \cap \rho$, substituímos a equação de $r_1$ na de $\rho$, obtendo

$$(1 + t) + 2\,(1 + 2\,t) + 2\,(1 + 2\,t) = 1, \quad 9\,t + 5 = 1, \quad t = -4/9.$$

Portanto,

$$P = (1 - 4/9, 1 - 8/9, 1 - 8/9) = (5/9, 1/9, 1/9).$$

Temos agora

$$\overline{PQ} = (4/9, -1/9, -1/9)$$

(que é ortogonal a $(1,2,2)$). Portanto, a distância é $\sqrt{18}/9 = \sqrt{2}/\sqrt{9} = \sqrt{2}/3$.

Outra opção é a seguinte, para cada ponto $T = (1+t, 1+2\,t, 1+2\,t)$ da reta $r_1$ considere o vetor $\overline{QT} = (t, 1+2\,t, 1+2\,t)$. O ponto de $r_1$ mais próximo de $Q$ é dado pela condição

$$\overline{PT} \cdot (1,2,2) = 0 = t + 2 + 4\,t + 2 + 4\,t = 4 + 9\,t.$$

Obtendo, como acima, $t = -4/9$.

Como as duas retas são paralelas, todos os pontos da reta $r_2$ estão a mesma distância da reta $r_1$. Esta distância foi calculada no item anterior e é $\sqrt{2}/3$. Portanto, não existe nenhum ponto de $r_2$ a distância $1/3$ de $r_1$, pois $1/3 < \sqrt{2}/3$.

Observe que as retas $r_1$ e $r_2$ são paralelas. O ponto $C$ é obtido considerando a interseção da reta $r_1$ e o plano $\alpha$ ortogonal a $r_1$ contendo $B$. Em tal caso, por construção, $\overline{AC}$ é ortogonal a $\overline{AC}$ e são os catetos do triângulo.

A equação do plano $\alpha$ é

$$\alpha\colon x + 2y + 2z = 10.$$

A interseção de $\alpha$ e $r_1$ é obtida como segue:

$$(1+t) + 2(1+2\,t) + 2(1+2\,t) = 10, \quad 9\,t = 5, \quad t = 5/9.$$

Portanto o ponto $C$ é

$$C = (14/9, 19/9, 19/9).$$

Verifique que $\overline{BC} = (4/9, -1/9, -1/9)$ é ortogonal a $(1,2,2)$ (o vetor diretor de $r_2$).

**9)** Considere o plano

$$\pi\colon x + y - z = 1,$$

e os pontos $A = (1,0,0)$ e $B = (0,1,0)$ do plano. Determine pontos $C$ e $D$ de $\pi$ tais que os pontos $A, B, C, D$ sejam os vértices de um quadrado (contido em $\pi$).

**Resposta:** Considere o vetor $\overline{BA} = (1, -1, 0)$. Suponhamos que o lado $AC$ seja ortogonal ao lado $AB$. Em tal caso o vetor $\overline{AC}$ deve ser ortogonal a $\overline{BA} = (1, -1, 0)$, e como é um vetor paralelo ao plano $\pi$ também deve ser ortogonal ao vetor normal do plano (o vetor $(1, 1, -1)$). Isto é, o vetor $\overline{AC}$ é paralelo a $(1, -1, 0) \times (1, 1, -1) = (1, 1, 2)$. Como $AC$ e $AB$ são lados de um quadrado devem ter o mesmo módulo (no caso, $\sqrt{2}$). Portanto,

$$\overline{AC} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}).$$

Portanto,

$$C = A + \overline{AC} = (1 + 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}).$$

Finalmente,

$$D = B + \overline{AC} = (1/\sqrt{3}, 1 + 1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}).$$

Ou de outra forma, veja que

$$D = C + \overline{AB} = (1 + 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}) + (-1, 1, 0).$$

Certamente, há outras possibilidades para os vértices do quadrado.

**10)** Considere as retas

$$r = (1 + t, 2t, 1 - t),\ t \in \mathbb{R}, \quad s = (2t, 1 + t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

- Determine a reta perpendicular comum $\ell$ a $r$ e $s$ (ou seja, uma reta perpendicular a $r$ e $s$ que intercepta as duas retas).
- Determine pontos $P \in r$ e $Q \in S$ tais que a distância entre $P$ e $Q$ seja igual a distância entre as retas $r$ e $s$.

**Resposta:**

Para calcular a reta $\ell$ procedemos como segue:

- Determinamos o plano $\pi$ contendo a $r$ e ortogonal a $s$ e $r$. O plano $\pi$ é paralelo a $(1, 2, -1)$ (o vetor diretor de $r$) e a $(1, 2, -1) \times (2, 1, 1) = (3, -3, -3)$ (um vetor ortogonal a $r$ e $s$). Portanto, seu vetor normal é paralelo a $(1, 2, -1) \times (1, -1, -1) = (-3, 0, -3)$. Logo a equação cartesiana de $\pi$ é da forma

  $$x + z = d.$$

  Como o ponto $(1, 0, 1) \in r$,

  $$\pi\colon x + z = 2.$$

- Determinamos o ponto $A$ de interseção de $\pi$ e $s$. Para isso devemos resolver,
$$2s + s = 2, \quad s = 2/3.$$
Logo $A = (4/3, 5/3.2/3)$.

- A reta procurada $\ell$ é a reta contendo $A$ e paralela a $(1, -1, -1)$ (o vetor ortogonal as retas $r$ e $s$ obtido acima). Ou seja
$$\ell\colon (4/3 + \lambda, 5/3 - \lambda, 2/3 - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Vejamos que de fato esta reta intercepta à reta $r$. Devemos resolver o sistema
$$4/3 + \lambda = 1 + t, \quad 5/3 - \lambda = 2t, \quad 2/3 - \lambda = 1 - t.$$
As solução é $\lambda = 1/3$ e $t = 4/3$. Portanto, o ponto $B$ de interseção é
$$B = (5/3, 4/3, 1/3).$$
Confira que o vetor $\overline{AB} = 1/3(1, -1, -1)$ é paralelo a $(1, -1, -1)$.

- Finalmente, os temos $P = B$ e $Q = A$.

Faremos um comentário final. Os cálculos feitos implicam que a distância entre as retas $r$ e $s$ é $1/\sqrt{3}$. Usando o "método tradicional", e escolhendo os pontos $M = (1, 0, 1) \in r$ e $N = (0, 1, 0) \in s$, temos que a distância $d$ entre as retas é
$$d = \frac{|\overline{MN} \cdot (1, 2, -1) \times (2, 1, 1)|}{|(1, 2, -1) \times (2, 1, 1)|} = \frac{|(1, -1, 1) \cdot (3, -3, -3)|}{\sqrt{27}} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
obtendo o mesmo resultado.

**11)** Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, 1)$.

1. Determine o ponto $M$ do segmento $AB$ tal que $\mathrm{dist}(AM) = \mathrm{dist}(MB)$ (isto é, $M$ é o ponto médio do segmento $AB$).

2. Determine a relação entre os vetores $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$.

3. Determine (em termos de distância) a propriedade que verificam os pontos do plano $\pi$ que contém o ponto $M$ e é ortogonal ao vetor $\overline{AB}$.

4. Determine o ponto $T$ do segmento $AB$ tal que $\mathrm{dist}(AT) = 2\,\mathrm{dist}(BT)$.

5. Estude a veracidade da seguinte afirmação: considere o plano $\rho$ que contém o ponto $T$ e é ortogonal ao vetor $\overline{AB}$. Então todo ponto $X$ de $\rho$ verifica $\mathrm{dist}(AX) = 2\,\mathrm{dist}(BX)$.

**Resposta:** Para o item (1) considere primeiro o vetor $\overline{AB} = (-1, 1, 0)$. Observe que o ponto $M$ verifica $M = A + t(-1, 1, 0)$ (isto decorre do fato de $M$ pertencer ao segmento $AB$) onde $t$ é escolhido de forma que

$$|AM| = |MB|,$$

(isto decorre do fato de $M$ equidistar dos pontos $A$ e $B$). Como $|AM|$ e $|MB|$ são poistivos, a condição é equivalente a

$$|AM|^2 = |MB|^2.$$

Observe que

$$|AM|^2 = t^2\,|AB|^2,$$

e que

$$\overline{MB} = \overline{AB} - t\overline{AB} = (1-t)\overline{AB}.$$

Portanto,

$$|MB|^2 = (1-t)^2|AB|^2.$$

Portanto, $t$ verifica

$$t^2 = (1-t)^2, \quad t = 1/2.$$

Portanto,

$$M = (1, 0, 1) + (-1/2, 1/2, 0) = (1/2, 1/2, 1).$$

Observe que a condição obtida é equivalente a

$$M = (A+B)/2.$$

Verificamos a última afirmação:

$$M = A + 1/2(B - A) = 1/2(B + A).$$

Verifique que $\overline{AM} = -\overline{BM}$.

Os pontos do plano $\pi$ são equidistantes dos pontos $A$ e $B$. Para provar a afirmação considere um ponto $P$ do plano e o triângulo retângulo de vêrtices $A, M, P$. Temos, pelo teorema de Pitágoras,

$$|AP|^2 = |PM|^2 + |AM|^2.$$

Considere agora o triângulo retângulo de vêrtices $B, M, P$. Como no caso anterior, temos

$$|BP|^2 = |PM|^2 + |BM|^2.$$

Pela escolha de $M$,

$$|BP|^2 = |PM|^2 + |BM|^2 = |PM|^2 + |AM|^2 = |AP|^2,$$

isto prova a afirmação.

Como no item (1), temos que o ponto $T$ verifica $T = A + s\,\overline{AB} = A + s(-1, 1, 0)$ (isto decorre do fato de $MT$ pertencer ao segmento $AB$) onde $s$ é escolhido de forma que

$$|AT| = 2\,|BT|.$$

Como $|AT|$ e $|BT|$ são poistivos, a condição é equivalente a

$$|AT|^2 = 4\,|BT|^2.$$

Observe que

$$|AT|^2 = s^2\,|AB|^2,$$

e que

$$\overline{TB} = \overline{AB} - s\overline{AB} = (1 - s)\overline{AB}.$$

Portanto,

$$|TB|^2 = (1 - s)^2 |AB|^2.$$

Portanto, $s$ verifica

$$s^2 = 4\,(1 - s)^2, \quad 3s^2 - 8s + 4 = 0.$$

Logo

$$s = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6},$$

portanto,

$$s = 2, \quad \text{ou} \quad s = 1/3.$$

Observe que os pontos do segemnto $AB$ são os pontos da forma $A + s\,\overline{AB}$ onde $s \in [0,1]$. Portanto, se escolhemos $s = 2$ obtemos um ponto fora do segmento $AB$ (interprete geometricamente este fato, faça uma figura...) Logo $s = 1/3$. Portanto,

$$T = (1,0,1) + (-1/3, 1/3, 0) = (2/3, 1/3, 1).$$

Veja que a condição que determina $T$ é

$$T = A + 1/3(B - A) = 1/3(B + 2A),$$

(talvez esta expressão tenha mais significado para v.).

Para o item (5), veja que raciocinando como no item (3) obtemos que a afirmação é falsa. Considere um ponto $X$ ($X \neq T$) do plano $\rho$ e observe que os triângulos de vêrtices $A, T, X$ e $B, T, X$ são retângulos. Temos, pelo teorema de Pitágoras,

$$|AX|^2 = |XT|^2 + |AT|^2, \quad |BX|^2 = |XT|^2 + |BT|^2.$$

Pela escolha de $T$ (isto é, $|AT|^2 = 4\,|BT|^2$) temos

$$\begin{aligned} |AX|^2 \; &= |XT|^2 + |AT|^2 = |XT|^2 + 4\,|BT|^2 = \\ &= 4\,(|XT|^2 + |BT|^2) - 3\,|XT|^2 = \\ &= 4\,|BX|^2 - 3\,|XT|^2 \neq 4\,|BX|^2, \end{aligned}$$

isto prova a afirmação é falsa.