Álgebra Linear I - Lista 10

Transfromações inversas. Matriz inversa

Respostas

1) Estude se existe uma matriz A tal que

$$A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$$

para todos os valores de a, b, c e d.

Resposta: Seja

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

e dadas

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$$

queremos A tal que $AB = C$

Se B é inversível temos:

$$ABB^{-1} = CB^{-1}, \quad A = CB^{-1}.$$

Se B não for inversível temos que analisar alguns casos, o sistema fica:

$$\begin{pmatrix} ea + cf & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}.$$

Olhando as linhas individualmente, temos

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$

Note quem estamos considerando o caso em que a matriz B não é inversível (isto é $ad - bc = 0$). E caso : $ad - c^2 = 0$ e $ac - ab = 0$ ou se $ad - b^2 = 0$ e $dc - db = 0$ um dos dois sistemas acima vai possuir infinitas soluções, caso uma dessas condições não seja satisfeita o problema será impossível.

2) Estude se as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Sejam A e B matrizes tais que AB é a matriz identidade. Então A é invesível e B é sua inversa.

2. Seja A uma matriz 2×2 inversível. Suponha que $A^2 = 2A$. Então $\det A = 2$.

3. Suponha que A é uma matriz inversível. Seja B a matriz obtida a partir de A substituindo a segunda linha de A pela soma da segunda e primeira linha de A. Então B é inversível.

4. Se A é inversível e AB é a matriz 0, então $B = 0$.

5. Se A é inversível e $AB = A^3$, então $B = A^2$ e B é inversível.

6. Se A é uma matriz quadrada singular (isto é, com determinante nulo), então escalonando A é possível obter uma matriz com uma linha formada por zeros.

7. Suponha que A é uma matriz 3×3 inversível e X a matriz coluna $(x, y, z)^t$. Então o sistema $AX = B$, $B = (a, b, c)^t$, tem solução única. Caso a resposta seja afirmativa, determine a solução do sitema.

8. Suponha que A é uma matriz inversível e X é a matriz $(x, y, z)^t$. Então o sistema $AX = X$ tem solução única.

Resposta:

- (item 1) Falsa. A matriz A pode ser uma matriz não quadrada. Escolha, por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e veja que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (item (2)) Falsa. Como o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes e $A^2 = (2I)A$ (I a matriz identidade), temos

$$\det(A) = \det(2I) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2.$$

- (item (3)) Verdadeira, observe que A e B têm o mesmo determinante (no caso, diferente de zero).

- (item (4)) Verdadeira, pois se $AB = C$ e A é inversível então $A^{-1}AB = A^{-1}C$ donde $B = A^{-1}C$, portanto se $C = 0$ matriz nula $B = 0$ matriz nula.

- (item (5)) Verdadeira, pois pelo mesmo raciocinio do item anterior teriamos$B = A^{-1}A^3 = A^2$ e teriamos $\det(B) = \det(A)^2 > 0$ donde A é inversível.

- (item (6)) Verdadeira, pois se considerarmos o sistema $AX = 0$, onde A é a matriz não inversível esse sistema terá infinita soluções. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

onde X é uma solução diferente da nula, Portanto:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Donde se fizermos a operação de escalonamento definida por esses λ's obteremos uma linha nula.

- (item (7)) Verdadeira. Suponha que existam duas soluções distintas X_1 e X_2. Donde $AX_1 = B$ e $AX_2 = B$, portanto $A(X_1 - X_2) = 0$, e por conseguinte o problema $AX = 0$ possuiria pelo menos uma solução distinta da nula e portanto A não seria inversível. A solucão é da forma $X = A^{-1}B$.

- (item (8)) Falsa. Note que se $AX = X$ então $(A - I)X = 0$ e esse sistema tem solução única apenas se e só se $A - I$ for inversível.

3) Ache a matriz inversa A^{-1} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verifique explícitamente (fazendo o produto de matrizes) que a primeira coluna de $A^{-1}A$ é

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, determine a forma matricial da inversa da transformação afim

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Resposta: A matriz A^{-1} é

$$A = \begin{pmatrix} 4/9 & 10/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -1/9 \\ 1/9 & 2/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Lembre também que a inversa de uma transformação afim T é

$$T^{-1} = (L_T)^{-1} - (L_T)^{-1}(b).$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} 4/9 & 10/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -1/9 \\ 1/9 & 2/9 & 4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/9 & 10/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -1/9 \\ 1/9 & 2/9 & 4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4) Encontre, quando possível, as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Para a primeira matriz. Seja

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, satisfaz a seguinte igualdade:

$$\begin{pmatrix} 2a+2d+2g & 2b+2e+2h & 2c+2f+2i \\ 2a+2d & 2b+2e & 2c+2f \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde por retrosubstituição temos:

$$a = 0, d = 0, g = \frac{1}{2}, b = 0, e = \frac{1}{2}, h = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}, f = -\frac{1}{2}, i = 0.$$

Portanto, a inversa é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Para a segunda matriz, note que a sengunda coluna é igual a primeira multiplicada por 2, portanto, a matriz não é inversível.

5) Determine, se possível, a e b de forma que as matrizes A e B sejam inversíveis:

$$A = \begin{pmatrix} a+b+1 & 3918 & 1457 \\ 0 & a-b+1 & 1789 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 1569 & a-b & 0 \\ \pi & 7894 & a+b \end{pmatrix}.$$

Resposta:

- Note que o determinante da matriz simplesmente o produto da diagonal principal, portanto nesse primeiro caso podemos tomar $a = 2$ e $b = 1$.

- Nesse segundo caso também, inclusive os mesmos valores de a e b servem pra esse exemplo

6)

(a) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sejam $B = A^2$ e C a matriz inversa de B, (isto é $C = B^{-1}$). Suponha que

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Determine o coeficiente $c_{1,2}$ da matriz C.

Resposta: Utilizaremos o método de Gauss para o cálculo da matriz inversa.

Início:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: (II-linha) $-$ (I-linha) e (III-linha) $-$ 2 (I-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: $-$(II-linha) e $-$(III-linha) (trocas de sinal)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Operações: (III-linha) -3 (II-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

Operações: 1/2 (III-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

Operações: (I-linha) $-$ 2 (II-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

Operações: (I-linha) $-$ (III-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Observe que se $B = A^2$ então $B^{-1} = A^{-1}\,A^{-1}A^{-1}\,A^{-1}$:

$$A^2\,(A^{-1}\,A^{-1}) = A\,\underbrace{A\,A^{-1}}_{Id}\,A^{-1} = A\,Id\,A^{-1} = A\,A^{-1} = Id.$$

Portanto

$$C = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Temos

$c_{1,2} = ((-1/2)\,(1/2)) + ((1/2)\,(-1)) + ((1/2)\,(3/2)) = -1/4 - 1/2 + 3/4 = 0.$

7) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4/9 & 10/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -1/9 \\ c & d & 4/9 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a inversa da matriz A.

b) Sabemos que $C = B^{-1}$. Determine a, b, c e d.

Resposta:

a) Utilizaremos o método de Gauss para o cálculo da matriz inversa.

Início:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: (I-linha)/2 − e III-linha− I-linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operações: troca de linhas II e III, troca de sinal de II

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operações: III-linha − I linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operações: III-linha − II linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operações: I-linha − III linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operações: I-linha − II linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Sabemos que

$$B\,C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/9 & 10/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -1/9 \\ c & d & 4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fazemos as seguintes operações para isolar as incógnitas:

- **(II)-linha de $A \times$ (I)-coluna de B;**

$$a\,(4/9) - 2/9 = 0, \quad a = 1/2,$$

- **(I)-linha de $A \times$ (III)-coluna de B;**

$$2/9 + 2/9 + (4/9)b = 0, \quad b = -1,$$

- **(III)-linha de $A \times$ (I)-coluna de B;**

$$2/9 + 2\,c = 0, \quad c = -1/9,$$

- **(III)-linha de $A \times$ (II)-coluna de B;**

$$-4/9 + 2\,d = 0, \quad d = 2/9.$$