Álgebra Linear I - Lista 5

Equações de retas e planos. Posições relativas

Respostas

1) Obtenha equações paramétricas e cartesianas:

- Das retas que contém aos pontos
  - $A = (2, 3, 4)$ e $B = (5, 6, 7)$,
  - $A = (-3, 1, 2)$ e $B = (6, 0, -2)$,
  - $A = (2, 5, 1)$ e $B = (3, 5, 1)$.
- Dos planos que contêm os pontos
  - $A = (2, 3, 4)$, $B = (5, 6, 7)$, e $C = (1, 1, 1)$,
  - $A = (-3, 1, 2)$ e $B = (6, 0, -2)$, e $C = (0, 0, 0)$,
  - $A = (2, 5, 1)$ e $B = (3, 5, 1)$, e $C = (1, 1, 1)$,
  - $A = (2, 3, 4)$, $B = (5, 6, 7)$, e $C = (3, 3, 3)$.

Determine (quando possível) a interseção das retas com os planos $\mathbb{XY}$, $\mathbb{XZ}$ e $\mathbb{YZ}$, e a interseção dos planos com os eixos coordenados $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Z}$.

Resposta: Equações paramétricas (seguindo ordem): $(2+3t, 3+3t, 4+3t)$, $t \in \mathbb{R}$, $(-3+9t, 1-t, 2-4t)$, $t \in \mathbb{R}$, $(2+t, 5, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Equações cartesianas (seguindo a ordem) (é suficiente encontrar dois planos diferentes contendo as retas): $x - z = -2$ e $x - y = -1$; $x + 9y = 6$ e $4y - z = 2$; $z = 1$ e $y = 5$.

Calcularemos a interseção da primeira reta com os planos cartesianos. A interseção com o plano $\mathbb{XY}$ é dada pela condição:

$$4 + 3t = 0, \qquad t = -4/3.$$

Obtemos o ponto $(-2, -1, 0)$.

Respeito as interseções. A interseção com o plano $\mathbb{XZ}$ é dada pela condição:

$$3 + 3t = 0, \qquad t = -1.$$

Obtemos o ponto $(-1,0,1)$.

A interseção com o plano $\mathbb{YZ}$ é dada pela condição:

$$2+3t=0, \qquad t=-2/3.$$

Obtemos o ponto $(0,1,2)$.

Equações paramétricas dos planos (seguindo a ordem) são:

- $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,1,1)+t(1,2,3), \quad s,t\in\mathbb{R}$,
- $(x,y,z)=s(-3,1,2)+t(6,0,-2), \quad s,t\in\mathbb{R}$,
- $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,4,0)+t(2,4,0), \quad s,t\in\mathbb{R}$,
- $(x,y,z)=(3,3,3)+s(1,0,-1)+t(2,3,4), \quad s,t\in\mathbb{R}$.

As equações cartesianas dos planos são:

- $x-2y+z=0$,
- $x-3y+3z=0$,
- $z=1$,
- $x-2y+z=0$.

Finalmente, as interseçõs dos planos primeiro, segundo e quarto com os eixos é a origem. O plano $z=1$ não intercepta os eixos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, e a interseção com o eixo $\mathbb{Z}$ é o ponto $(0,0,1)$.

2) Considere os pontos $A=(3,5,2)$, $B=(-1,-1,4)$, $C=(2,1,5)$ e $D=(0,3,1)$, e as retas r_1 e r_2 que contêm, respectivamente, aos pontos A e B e C e D. Veja que estas retas r_1 e r_2 têm um ponto P em comum. Decida se o ponto P pertence aos segmentos de reta AB e CD.

Resposta: Considere os vetores $\overline{BA}=(4,6,-2)$ e $\overline{DC}=(2,-2,4)$

Temos

$$r_1\colon (-1+4\,t,-1+6\,t,4-2\,t), \qquad r_2\colon (0+2\,s,3-2\,s,1+4\,s)$$

Igualando as equações

$$-1+4\,t=2\,s, \quad -1+6\,t=3-2\,s, \quad 4-2\,t=1+4\,s.$$

Resolvendo o sistema obtemos que a solução é $s = t = 1/2$. Este ponto é $(1/2, 1/2, 3)$.

O ponto pertence ao segmento BA se $0 \leq t \leq 1$ e pertence ao segmento DC se $0 \leq s \leq 1$. Portanto, o ponto pertence á interseção destes segmentos.

3) Estude a posição relativa das retas

$$\begin{aligned} r_1 &= \{(x,y,z) = (1,1,7) + t(0,1,2);\ t \in \mathbb{R}\}, \\ r_2 &= \{(x,y,z) = (0,4,5) + s(-1,5,2);\ t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Se as retas se incerptam determine o ponto de interseção.

Resposta: Resolvemos o sistema

$$1 = -s, \quad 1 + t = 4 + 5s, \quad 7 + 2t = 5 + 2s,$$

cuja solução é $s = -1, t = -2$. Logo, como os sistema tem solução, as retas são concorrentes e a interseção é $(2, -1, 3)$.

4) Determine equações cartesianas e paramétricas do plano que passa por $(1, -3, 2)$ e é ortogonal à reta $r = \{(1 - t, 2t - 3, 2 + t);\ t \in \mathbb{R}\}$.

Resposta: O vetor normal do plano é $(-1, 2, 1)$. Logo sua equação cartesiana é da forma $\pi\colon x - 2y - z = d$, onde $d = 1 + 6 - 2 = 5$.

Para determinar a equação paramétrica determinaremos três pontos do plano, por exemplo $P = (1, -3, 2)$, $Q = (5, 0, 0)$ e $T = (0, 0, -5)$. Os vetores $\overline{TP} = (1, -3, 7)$ e $\overline{TQ} = (5, 0, 5)$ são vetores diretores do plano. A equação paramétrica é

$$(x, y, z) = (1, -3, 2) + t(1, -3, 7) + s(5, 0, 5), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

5) Determine as equações cartesianas e paramétricas do plano π que passa por $A = (1, \frac{1}{2}, 0)$ e é ortogonal ao eixo x. Faça o mesmo com o plano ρ que passa por $A = (1, \frac{1}{2}, 0)$ e é ortogonal ao eixo y.

Resposta: Primeira parte, plano $x = 1$. Segunda parte, plano $y = 1/2$.

6) Considere a reta r_1 de equações paramétricas

$$r_1\colon (2t, 1 + t, -1 - t) \quad t \in \mathbb{R}$$

e a reta r_2 de equações cartesianas

$$x + 2y - 2z = 1, \quad x - y = 2.$$

a) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos π e ρ (escritos em equações cartesianas) tais que π seja paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e ρ seja paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$.

b) Determine uma equação paramétrica da reta r_2.

c) Determine a posição relativa das retas r_1 e r_2 (reversas, paralelas ou se interceptam).

Resposta:

a) $\pi\colon y + z = 0, \qquad \rho\colon x - 2y = -2.$

b) $r_2\colon (2 + 2t, 2t, 1/2 + 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$

c) reversas.

7) Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 2, 2)$ e $C = (2, 1, 2)$.

a) Determine a área do triângulo T de vértices A, B e C.

b) Determine um vetor normal ao plano π que contém os pontos A, B e C.

c) Determine equações paramétricas do plano π.

d) Determine uma equação cartesiana do plano π.

e) Determine um ponto D tal que os pontos A, B, C e D formem um paralelogramo P.

f) Determine a área do paralelogramo P do item anterior.

Resposta: Considere os vetores $\overline{AB} = (-1, 2, 1)$ e $\overline{AC} = (1, 1, 1)$. A área do triângulo T e $1/2$ da área de um paralelogramo R de vértices A, B e C. Temos

$$\text{área}(R) = |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |(1, 2, -3)| = \sqrt{14}.$$

Portanto, a área de T é $\sqrt{14}/2$.

PSfrag replacements

A
B
C
D

Figure 1: Paralelogramos

Observe que no item (a) determinamos o vetor normal ao plano, obtido como $\overline{AB} \times \overline{AC} = (1, 2, -3)$. Logo um vetor normal é $(1, 2, -3)$ e a equação cartesiana do plano é da forma

$$x + 2\,y - 3\,z = d,$$

onde d é determinado pela condição dos pontos A, B e C pertencer a π, ou seja: $1 + 0 - 3 = d = -2$. (Observe que respondemos simultaneamente aos itens (b) e (d)).

Para determinar as equações paramétricas de π devemos conhecer dois vetores paralelos a π (não paralelos entre si) e um ponto do plano. Podemos escolher $\overline{AB} = (-1, 2, 1)$ e $\overline{AC} = (1, 1, 1)$ e o ponto $A = (1, 0, 1)$. Portanto,

$$x = 1 - t + s, \quad y = 0 + 2\,t + s, \quad z = 1 + t + s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, para o item (e), há as seguintes possibilidades para o ponto D:

- $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$, isto é, $\overline{AB} = \pm\overline{CD}$,
- $\overline{AC}$ paralelo a $\overline{BD}$, isto é $\overline{AC} = \pm\overline{BD}$

No primeiro caso podemos ter

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AC} + \overline{AB}, \quad D = B + C - A = (0, 2, 2) + (2, 1, 2) - (1, 0, 1) = (1, 3, 3), \\ \overline{AD} &= \overline{AB} - \overline{AC}, \quad D = B - C + A = (0, 2, 2) - (2, 1, 2) + (1, 0, 1) = (-1, 1, 1). \end{aligned}$$

No segundo caso podemos ter

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AC} - \overline{AB}, \quad D = C - B + A = (2,1,2) - (0,2,2) + (1,0,1) = (3,-1,1), \\ \overline{AD} &= \overline{AB} - \overline{AC}, \quad D = B - C + A = (0,2,2) - (2,1,2) + (1,0,1) = (-1,1,1). \end{aligned}$$

Finalmente, a área do paralelogramo P é o módulo do vetor $\overline{AB} \times \overline{AC} = (1,2,-3)$, isto é, $|(1,2,-3)| = \sqrt{14}$.

8) Considere os planos

$$\pi\colon\ 2x - 3y + z = 1, \quad \pi'\colon x + 2y + 2z = k.$$

Determine k para que a interseção dos planos seja uma reta que passa pelo ponto $(1,1,2)$.

Resposta: Veja que a única possibilidade é $k = 7$.

9) Considere os planos

$$\pi\colon 2x - 3y + 2z = 1, \quad \pi'\colon ax - 12y + cz = d.$$

Se possível, determine a, b, c e d para que a interseção dos planos seja:

- o conjunto vazio (ou seja, os planos não se interceptam),
- um ponto,
- uma reta,
- um plano.

Resposta: Para ser o conjunto vazio (ou seja, os planos não se interceptam), os planos devem ser paralelos. Logo os vetores normais devem ser paralelos. Ou seja $(a,-12,c) = \lambda(2,-3,2)$. Logo $\lambda = 4$ e $a = c = 8$. Finalmente, os planos devem ser diferentes, logo é suficiente escolher $d \neq 4$.

A opção um ponto é impossível.

Para a interseção ser uma reta é suficiente escolher $a \neq 8$ ou $c \neq 8$. Nestes casos, não há restrições para d.

Para a interseção ser um plano, os planos devem ser iguais. Raciocinando como no primeiro item, obtemos $a = c = 8$ e $d = 4$. um plano.

10) Considere os planos

$$\pi\colon 2x + y - z = 1, \quad \pi'\colon x + 3y - z = -1.$$

a) Encontre um terceiro plano ρ tal que a interseção dos três planos π, π' e ρ seja um único ponto;

b) Encontre um terceiro plano τ tal que a interseção dos três π, π' e τ planos seja uma reta;

c) Encontre um terceiro plano γ tal que a interseção dos três planos π, π' e γ seja vazia.

Resposta: Para o item (a) é suficiente considerar um plano cujo vetor normal não esteja no plano (vetorial) gerado pelos vetores normais dos planos Π e Π'. Por exemplo $\Pi'': x = 0$.

Outra possibilidade é procurar um plano cujo vetor normal seja a reta de interseção de Π e Π'. Este vetor normal é $(2,1,-1) \times (1,3,-1) = (2,1,5)$. Logo o plano procurado é (por exemplo) $2x + y + 5z = 0$. Deixamos para v. verificar que os três planos se intersectam em um ponto. (resolva o sistema!)

Para o item (b) fazemos o seguinte. Observe que $\Pi \cap \Pi'$ é uma reta r (pois os planos não são paralelos). Se $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi''$ é uma reta essa reta é necessariamente r!. Portanto, $r \subset \Pi''$. Então podemos escolher como Π'' qualquer plano que contenha r e seja diferente dos outros dois planos.

Determinemos r. Seu vetor diretor já foi obtido como o produto vetorial dos vetores normais dos planos Π e Π', $(2,1,+5)$. Um ponto de r é $(0,-1,-2)$. Logo $r\colon (2t, -1+t, -2+5t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Para determinar Π'' devemos encontrar um ponto que não pertença aos outros planos. Por exemplo, $P = (1,0,0)$. Então é suficiente considerar Π'' como o plano que contém r e P. O vetor nomal n do plano é perpendicular aos vetores diretores $(2,1,5)$ e $(1,1,2)$ do plano. Logo $n = (2,1,-5) \times (1,1,2) = (-3,1,1)$. Logo $\Pi'': -3x + y + z = d$ onde d é obtido por $(1,0,0) \in \Pi''$, $d = -3$.

Para que a interseção seja vazia há várias opções. A primeira é que Π'' seja um plano paralelo a Π e diferente. Por exemplo, $2x + y - z = 0$. Outra possibilidade é $\Pi \cap \Pi'' = r_1$ e $\Pi' \cap \Pi'' = r_2$ onde r_1 e r_2 são retas paralelas diferentes (em tal caso são paralelas a r). Logo é suficiente considerar um plano contendo duas retas paralelas a r. Por exemplo,

$$r_1 = (2t, t, -5t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad r_2 = (2s, s+1, 5s+2), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Deixaremos para v. determinar a equação do plano.

11) Dado o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ 4x & + & 2y & - & 6z & = & 8 \\ x & + & 3y & - & 9z & = & 12 \end{array}\right.$$

estude a existência de soluções. Interprete geometricamente a sua resposta.

Resposta: Escalonaremos o sistema obtendo sistemas equivalentes. Trocando a ordem.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 9z & = & 12 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ 4x & + & 2y & - & 6z & = & 8 \end{array}\right.$$

Considerando a segunda equação menos 2×primeira e a terceira menos 4×primeira

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 9z & = & 12 \\ 0x & - & 5y & + & 15z & = & -19 \\ 0x & - & 10y & + & 30z & = & -40 \end{array}\right.$$

Considerando a terceira menos 2×segunda (eliminando a variável y)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 9z & = & 12 \\ 0x & - & 5y & + & 15z & = & -19 \\ 0x & - & 0y & + & 0z & = & -2 \end{array}\right.$$

Logo não existe solução. Observe que os dois últimos planos (do sistema inicial) são paralelos e diferentes, e o segundo plano não é paralelo.

12) Mostre que os planos π_1, π_2, π_3 sempre sempre se interceptam em um ponto, independentemente dos valores de a, b, c e k.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \pi_1: & x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ \pi_2: & 2x & + & 4y & + & z & = & b \\ \pi_3: & 3x & + & 2y & + & kz & = & c \end{array}$$

Resposta: Escalonaremos, substituindo a segunda equação pela segunda menos 2×primeira, e a terceira equação pela terceira menos 3×primeira:

$$\left\{\begin{array}{rcrcccc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ 0x & + & 0y & - & 5z & = & b-2a \\ 0x & - & 4y & + & (k-9)z & = & c-3a \end{array}\right.$$

Trocando a ordem da segunda e da terceira equação já temos um sistema escalonado, com solução única. Isto significa que, independentemente do valor de k, os vetores normais dos planos não são coplanares e os três planos se intersectam em um ponto.