$\boxed{\text{Álgebra Linear I - Lista 4}}$

Produto vetorial. Determinantes

Respostas

1) Calcule os determinantes a seguir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 18 & 18 & 19 \\ 27 & 27 & 18 \end{vmatrix}.$$

Resposta: Desenvolvendo pela segunda linha,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\, 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\,(6+3) - (1-2) = -17.$$

Desenvolvendo pela primeira linha,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\, 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,(2) - (-2) = 6.$$

Consideramos as operações entre linhas que não mudam o determinante: linha 2 - (2) linha 1 e linha (3) - 3 linha 1:

$$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 18 & 18 & 19 \\ 27 & 27 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}.$$

Agora consideramos linha 3 + 9 linha 2:

$$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 18 & 18 & 19 \\ 27 & 27 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Veifique que os determinantes

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha - \cos\alpha & \sin\alpha + \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha - \cos\alpha & \sin\alpha + \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

não dependem de θ.

Resposta: Desenvolvendo o primeiro determinante pela terceira coluna, obtemos $\sin^2\alpha + \cos\ 2\alpha = 1$.

Para o segundo determinante procedemos analogamente. Primeiro fazemos uma operação entre linhas que não muda o determinante (qual?)

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha - \cos\alpha & \sin\alpha + \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}.$$

A seguir desenvolvemos pela última coluna,

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

3) Sem calcular diretamente, mostre que $x = 0$ e $x = 2$ satisfazem a equação

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Sem desenvolver o determinante, determine se existem outras soluções.

Resposta: Se $x = 0$ temos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Como este determinante tem duas linhas proporcionais (a primeira e a última) vale zero.

Se $x = 2$ temos

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Como este determinante tem duas linhas proporcionais (a primeira e a segunda) vale zero.

Não existem mais solučoes: desenvolvendo o determinante inicial temos uma equação de segundo grau.

4) Sem calcular diretamente, mostre as igualdades a seguir:

a)

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

b)

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Resposta: Fazendo uma operações entre linhas (qual?)

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observe que o último determinante tem duas linhas iguais, por isso vale zero.

Fazendo uma operação entre colunas (qual?)

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\,a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ 2\,a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ 2\,a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, uma nova operação entre colunas fornece

$$2\begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_1 & c_1\\ a_2 & a_2-b_2 & c_2\\ a_3 & a_3-b_3 & c_3\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & c_1\\ a_2 & -b_2 & c_2\\ a_3 & -b_3 & c_3\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

5) Considere os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

a) Determine $e_1 \times e_2$, $e_2 \times e_3$, $e_3 \times e_1$, $e_2 \times e_1$;

b) Os vetores $e_1 \times (e_1 \times e_2)$ e $(e_1 \times e_1) \times e_2$ são iguais?

Resposta: $e_1 \times e_2 = (0, 0, 1)$, $e_2 \times e_3 = (1, 0, 0)$, $e_3 \times e_1(0, 1, 0)$, $e_2 \times e_1 = (0, 0, -1)$.

Temos $e_1 \times (e_1 \times e_2) = (0, -1, 0)$ e $(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0 \times e_2 = 0$, logo são diferentes.

6) Calcule as áreas dos paralelogramos gerados pelos seguintes vetores:

a) $u = (2, 1, 3)$, $v = (-1, 2, -1)$;

b) $u = (3, -2, 0)$, $v = (-1, 0, 0)$;

c) c) $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -1)$.

Resposta: (a) $5\sqrt{3}$, (b) 2, (c) $5\sqrt{2}$.

7) Dados vetores u, v e w (não coplanares) mostre que $u \times (v \times w) = \alpha v + \beta w$.

Suponha agora que $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, 0, 0)$ e $w = (a_3, b_3, 0)$. Prove que $\alpha = u \cdot w$ e $\beta = -u \cdot v$.

Resposta: Escreva $n = (v \times w)$, logo n é o vetor normal ao plano vetorial π paralelo a v e w. O vetor $u \times n$ é normal a n, logo é paralelo a v e w (pertence a π) o que termina a primeira parte do exercício.

Temos $n = (0, 0, a_2 b_3)$. Logo $u \times (v \times w) = (b_1 b_3 a_2, -a_1 a_2 b_3, 0)$.

Resolvendo o sistema temos $\alpha u + \beta w = (b_1 b_3 a_2, -a_1 a_2 b_3, 0)$ obtemos

$$\alpha a_2 + \beta a_3 = a_2 b_2 b_3, \quad \beta b_3 = -a_1 a_2 b_3.$$

Logo $\beta = -a_1 a_2 = -u \cdot v$. Finalmente,

$$\alpha a_2 + \beta a_3 = a_2 b_2 b_3, \quad \alpha a_2 - a_3 a_2 a_1 = a_2 b_2 b_3, \quad \alpha = b_2 b_3 + a_3 a_1,$$

ou seja, $\alpha = u \cdot w$.

8) Suponha que $u \cdot (v \times w) = 3$. Calcule

- $u \cdot (w \times v)$,
- $(v \times w) \cdot u$,
- $w \cdot (u \times v)$,
- $v \cdot (u \times w)$,
- $v \cdot (w \times w)$.

Resposta: $u \cdot (w \times v) = -3$, $(v \times w) \cdot u = 3$, $w \cdot (u \times v) = 3$, $v \cdot (u \times w) - 3$, $v \cdot (w \times w) = 0$.

9) Mostre que para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$, os vetores $\mathbf{i} \times v$, $\mathbf{j} \times v$ e $\mathbf{k} \times v$ são coplanares.

Resposta: Considere o plano (vetorial) π que contém a origem e com vetor normal v. Como os vetores $\mathbf{i} \times v$, $\mathbf{j} \times v$ e $\mathbf{k} \times v$ são perpendiculares a v, logo estão no plano π. Portanto, são coplanares.

10) Responda as seguintes questões:

- Simplifique o máximo possível a expressão $(u + v) \times (u - v)$.
- Considere vetores coplanares u, v, w e k. Calcule $(u \times v) \times (w \times k)$.

Resposta: No primeiro item temos. $2(v \times u)$.

O produto vetorial do segundo item é o vetor nulo. Seja π o plano paralelo paralelo a estes vetores. Seja n o seu vetor normal. Se algum dos produtos vetorias é o vetor nulo o resultado é o vetor nulo. Caso contrário temos $(u \times v) = \sigma n$ e $(w \times k) = \rho n$, σ e $\rho \in \mathbb{R}$. Logo $(u \times v) \times (w \times k) = \sigma\rho(n \times n) = 0$.

11) Estude a veracidade das afirmações a seguir:

a) Existem vetores não nulos $\bar{u}$ e $\bar{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que $\bar{u} \cdot \bar{w} = 0$ e $\bar{u} \times \bar{w} = \bar{0}$.

b) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 2, 2) \times (a, 1, a) = (0, 0, 0)$.

c) Considere dois vetores $\bar{w}$ e $\bar{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que $w \times v = \bar{0}$. Então $w \cdot v = |w|\,|v|$.

d) Considere vetores $\bar{v}$ e $\bar{w}$ de $\mathbb{R}^3$. Então

$$\bar{v} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{v} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{0} \times \bar{w} = \bar{0}.$$

e) Considere um vetor $u \neq 0$. Suponha que $u \times v = u \times w$. Então, $v = w$?

Resposta: O item (a) é falso. Observe que

$$\bar{u} \cdot \bar{w} = |\bar{u}|\,|\bar{w}|\, \cos \alpha,$$

onde α é o ângulo formado pelos vetores $\bar{w}$ e $\bar{u}$. Como o produto escalar é zero e $|\bar{u}| \neq 0 \neq |\bar{w}|$, temos que $\cos \alpha = 0$. Portanto, $\alpha = \pi/2$ ou $2\pi/3$.

Da fórmula do módulo do produto vetorial temos

$$|\bar{u} \times \bar{w}| = |\bar{u}|\,|\bar{w}|\,|\mathrm{sen}\, \alpha|.$$

Como $|\mathrm{sen}\, \alpha| = 1$ se $\alpha = \pi/2$ or $3\pi/2$, temos

$$|\bar{u} \times \bar{w}| = |\bar{u}|\,|\bar{w}| \neq 0,$$

pois $|\bar{u}| \neq 0 \neq |\bar{w}|$.

O item (b) é falso. Observe que

$$(1, 2, 2) \times (a, 1, a) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = (2a - 2, -a + 2a, 1 - 2a).$$

Para o vetor resultante ser nulo deveriamos ter (simultaneamente) $a = 1$, $a = 0$ e $a = 1/2$, o que é impossível.

Outra possibilidade é observar que $(1, 2, 2) \times (a, 1, a) = \bar{0}$ se e somente se os vetores são paralelos, ou seja $(a, 1, a) = \sigma(1, 2, 2)$, para algum σ. Usando a segunda coordenada, temos $\sigma = 1/2$. Logo $a = 1/2$ (primeira coordenada) e $a = 1$ (terceira), o que é absurdo.

O item (c) é falso. A condição $w \times v = \bar{0}$ implica que os vetores são paralelos, mas eles podem formar ângulo π, e em tal caso o produto escalar é negativo. Por exemplo, considere os vetores $\bar{u} = (1, 1, 1)$ e $\bar{w} = (-1, -1, -1)$, temos $\bar{u} \times \bar{w} = 0$ e

$$\bar{u} \cdot \bar{w} = -3 \neq |\bar{u}|\,|\bar{v}| = \sqrt{3}\,\sqrt{3} = 3.$$

O item (d) é falso. Considere os vetores $\bar{v} = (1, 0, 0)$ e $\bar{w} = (0, 1, 0)$. Temos

$$\bar{v} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (1, 0, 0) \times ((1, 0, 0) \times (0, 1, 0)) = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0).$$

Porém, sempre se verifica, $(\bar{v} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{0} \times \bar{w} = \bar{0}$.

O item (e) é falso: considere $v = w + u$ e veja que $u \times v = u \times (w + u) = u \times w + u \times u = u \times w$.