Álgebra Linear I - Lista 3

Produto escalar. Ângulos. Ortogonalidade

Respostas

1) Nenhuma das expressões a continuação tem sentido. Explique o que há de errado em cada expressão. Sejam u, v, w e n quatro vetores, α um número e "$\underline{\cdot}$" o produto escalar.

- $u \cdot v \cdot w = 5$,
- $u \cdot v \cdot w = n$,
- $(u \cdot v) + w$,
- $\alpha \cdot (u \cdot v)$.

Resposta: Na primeira, $u \cdot v$ é um número κ, não faz sentido o produto escalar de κ (um número) pelo vetor w. Mesmo comentário para a segunda (em qualquer caso, o resultado de um produto escalar é um número, nunca um vetor). Na terceira estamos considerando a soma de um número $(u \cdot v)$ e um vetor. Finalmente, na última temos o mesmo tipo de absurdos.

2) Determine os ângulos do triângulo cujos vértices são

$$A = (3, 2, 1), \quad B = (3, 2, 2) \quad \text{e} \quad C = (3, 3, 2).$$

Resposta: Os lados são paralelos aos vetores $\overline{AB} = (0, 0, 1)$, $\overline{AC} = (0, 1, 1)$, e $\overline{BC} = (0, 1, 0)$. Portanto é um triângulo retângulo (os lados BC e AB são perpendiculares pois $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$. O ângulo ϕ entre AB e AC verifica

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 1 = |\overline{AB}||\overline{BC}| \cos \phi = \sqrt{2} \cos \phi.$$

Ou seja o ângulo e $\pi/4$. Claramente o ângulo que falta por calcular também é $\pi/4$.

3) Seja $\bar{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ um vetor unitário, onde α, β e γ são números diferentes de zero. Determine t de forma que os vetores

$$\bar{v} = (-\beta\, t, \alpha\, t, 0), \quad \bar{w} = (\alpha\,\gamma\, t, \beta\,\gamma\, t, -1/t)$$

e $\bar{u}$ sejam unitários e dois a dois ortogonais.

Resposta: Para que os vetores sejam ortogonais seu produto escalar deve ser nulo. Vemos diretamente que os produto escalares $u \cdot v$ e $v \cdot w$ são sempre zero. Por outro lado,

$$u \cdot w = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma t) - \gamma/t = 0.$$

Portanto, $(\alpha^2 + \beta^2) = 1/t^2$.

Os quadrados dos módulos dos vetores são:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad t^2(\alpha^2 + \beta^2), \quad t^2\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2) + 1/t^2.$$

Como $t^2(\alpha^2 + \beta^2) = 1$, temos

$$\gamma^2 + 1/t^2 = 1, \quad \gamma^2 = 1 - 1/t^2.$$

Ou seja, as condições são

$$\alpha = \pm\frac{1}{t}\cos\phi, \quad \beta = \pm\frac{1}{t}\sin\phi, \quad \gamma = \pm\sqrt{1 - 1/t^2}.$$

4) Responda as seguintes questões:

- Encontre, se possível, dois vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ do plano tais que os vetores $\bar{u} + \bar{v}$ e $\bar{u} - \bar{v}$ tenham o mesmo modulo.

- Mostre que se os vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ tem o mesmo módulo então os vetores $(\bar{u}+\bar{v})$ e $(\bar{u}-\bar{v})$ são ortogonais. Usando este fato, prove que as diagonais de um losango são perpendiculares.

Resposta: Para o primeiro item observe que os quadrados dos módulos dos vetores também devem ser iguais. Isto é

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot v = \\ ||u-v||^2 &= (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u - 2u\cdot v + v\cdot v. \end{aligned}$$

Simplificando,

$$u\cdot v = -u\cdot v, \quad 2u\cdot v = 0.$$

Ou seja, é suficiente que os vetores sejam ortogonais (perpendiculares). Portanto, é suficiente escolher dois vetores ortogonais, por exemplo $(1,1)$ e $(1,-1)$.

Para o segundo item (se os vetores u e v tem o mesmo módulo então $(u+v)$ e $(u-v)$ são ortogonais) veja que

$$(u+v)\cdot(u-v) = u\cdot u - u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v.$$

Como $u\cdot v = v\cdot u$. Portanto,

$$(u+v)\cdot(u-v) = u\cdot u - v\cdot v.$$

Como, por hipótese, $u\cdot u = v\cdot v$, obtemos $(u+v)\cdot(u-v) = 0$ e portanto os vetores são ortogonais.

Finalmente, para provar que as diagonais de um losango são perpendiculares, considere u e v vetores paralelos aos lados do losango. Observe que $||u|| = ||v||$ e que as diagonais são paralelas a $u+v$ e $u-v$. Calculando o produto escalar,

$$(u+v)\cdot(u-v) = 0.$$

Portanto, os vetores são ortogonais.

5) Use o produto escalar para provar que o ângulo inscrito em um semicírculo é reto. Veja a Figura 1.

Resposta: Observe que o ângulo inscrito é o ângulo formado pelos vetores $(u-v)$ e $-(v+u)$. Como no Exercício 4 temos

$$(u-v)\cdot -(v+u) = -|u|^2 + |v|^2 = 0,$$

pois u e v tem o mesmo módulo.

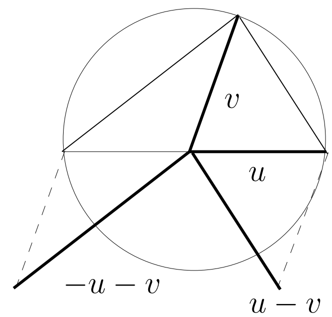

Figura 1:

6) Sejam **i**, **j** e **k** os vetores unitários $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Considere o vetor $v = (a, b, c)$ e defina α, β e γ como os ângulos do vetor v com os vetores **i**, **j** e **k**, respectivamente.

- Determine $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ (os denominados *cossenos diretores de* v).
- Mostre que $\dfrac{v}{||v||} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
- Como consequência obtenha $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
- Considere um vetor w com cossenos diretores $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$ e $\cos\gamma'$. Mostre que v e w são perpendiculares se, e somente se, $\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$.

Resposta: Teremos

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Por outra parte

$$\frac{v}{||v||} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Observe que

$$1 = \frac{v}{||v||} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Para o último item observe que

$$u \cdot w = ||u||||w|| = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

e que este número será zero se e somente se $\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$.

7) Sejam u e v dois vetores de módulo k e ℓ, respectivamente. Considere o vetor $w = \ell u + kv$. Mostre que este vetor bissecta o ângulo entre u e v (isto é, os ângulos entre w e u e entre w e v são iguais).

Resposta: Devemos ver que os ângulos ϕ entre w e u e ρ entre w e v são iguais. Considere os vetores unitários $u_1 = u/||u||$ e $v_1 = v/||v||$ e observe que $||\ell u|| = ||kv|| = \ell k = m$. Portanto $w = m(u_1 + v_1)$. Isto significa que w é a diagonal do losango de lados paralelos a u e v e de comprimento m (fazendo um desenho v. verá que agora o resultado é intuitivamente claro).

Usando produto escalar:

$$w \cdot u_1 = m(u_1 + v_1) \cdot u_1 = m(1 + v_1 \cdot u_1) = ||w|| \cos\phi.$$

Portanto,

$$\cos\phi = \frac{m(1 + u_1 \cdot v_1)}{||w||}.$$

Analogamente,

$$w \cdot v_1 = m(u_1 + v_1) \cdot v_1 = m(u_1 \cdot v_1 + 1) = ||w|| \cos\rho.$$

Portanto,

$$\cos\rho = \frac{m(1 + u_1 \cdot v_1)}{||w||}.$$

Logo os dois ângulos são iguais.

8) Considere dois vetores u e v não paralelos. Verifique que os vetores

$$u' = u/\parallel u \parallel \quad \text{e} \quad v' = v - (v \cdot u')\,u'$$

são ortogonais.

Resposta: É suficiente escrever

$$\begin{aligned} u' \cdot v' &= \tfrac{u}{||u||} \cdot (v - (v \cdot \tfrac{u}{||u||})\tfrac{u}{||u||} = \tfrac{1}{||u||}(u \cdot v) - \tfrac{1}{||u||^3}(v \cdot u)(u \cdot u) = \\ &= \tfrac{1}{||u||} u \cdot v - \tfrac{1}{||u||^3}(v \cdot u)||u||^2 = \tfrac{1}{||u||}(u \cdot v - v \cdot u) = 0. \end{aligned}$$

9) Considere três vetores e_1, e_2 e e_3 de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\| e_1 \| = \| e_2 \| = \| e_3 \| = 1 \quad \text{e} \quad e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0.$$

Sejam u e v vetores em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$u = 3e_1 + 4e_2, \quad \| v \| = 5 \quad \text{e} \quad v \cdot e_3 \neq 0.$$

Utilizando estas informações, calcule o ângulo entre os vetores $u + v$ e $u - v$. O que pode dar errado se $v \cdot e_3 = 0$?

Resposta: Veja que $||u|| = 5 = ||v||$ e que

$$(u + v) \cdot (u - v) = ||u||^2 - ||v||^2 = 0.$$

Observe que a condição $e_3 \cdot v \neq 0$ implica que $u \neq v$. Portanto, se $e_3 \cdot v = 0$ poderíamos ter $u - v = 0$ ou $u + v = 0$

10) Considere u, v e w vetores não nulos, com $u \cdot v = u \cdot w$. Mostre por um exemplo que não necessariamente temos $v = w$.

Resposta: É suficiente considerar $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ e $w = (0, 0, 1)$. Temos $u \cdot v = u \cdot w$ e $v \neq w$. Também poderimos escolher $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ e $w = (0, -11)$.

11) Considere os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-5, 9)$. Ache um vetor não nulo $w = \alpha u$ tal que o vetor $(v - w)$ seja ortogonal ao vetor u.

Resolva agora o mesmo problema no caso geral: considere vetores não nulos u, v e $w = \alpha u$. Determine α para que o vetor $(v - w)$ seja ortogonal ao vetor u?

Resposta: Temos $(v - w) = (-5 - \alpha, 9 - \alpha)$. Para que este vetor seja ortogonal a $(1, 1)$, devemos ter $(-5-\alpha, 9-\alpha) \cdot (1, 1) = 0$, isto é, $-5-\alpha+9-\alpha = 0$, $\alpha = 2$.

Para o caso geral veja que $\alpha = u \cdot v/||u|||^2$.

12 Os quatro vértices a seguir determinam um tetraedro regular: $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$, $C = (0,1,1)$ e $D = (1,1,0)$. Se E é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, determine qual dos ângulos $\widehat{AED}$ ou $\widehat{CBA}$ é o menor.

Resposta: Para calcular $\widehat{CBA}$ fazemos

$$\begin{aligned} \overline{BC} \cdot \overline{BA} &= (-1,1,0) \cdot (-1,0,-1) = 1 = \\ &= ||\overline{BC}||||\overline{BA}|| \cos \widehat{CBA} = 2 \cos \widehat{CBA}. \end{aligned}$$

Ou seja o ângulo é 60 graus.

Veja que $E = (1/2, 1/2, 1)$. Como antes, para calcular $\widehat{AED}$ fazemos

$$\begin{aligned} \overline{EA} \cdot \overline{ED} &= (-1/2, -1/2, -1) \cdot (1/2, 1/2, -1) = 1/2 = \\ &= ||\overline{EA}||||\overline{EB}|| \cos \widehat{AED} = 6/4 \cos \widehat{AED}. \end{aligned}$$

Ou seja $\cos \widehat{AED} = 1/3$. Como $1/3 < 1/2$ temos que o ângulo $\widehat{CBA}$ é menor.

13)Um vetor unitário v forma com o eixo coordenado OX um ângulo de $60°$ e com os outros dois eixos OY e OZ ângulos congruentes. Calcule as coordenadas de v.

Resposta: Temos que o vetor $v = (a, b, c)$ e $||v|| = 1$. Fazendo

$$(a, b, c).(1, 0, 0) = (1)(1) \cos\ 60°$$

temos $a = 1/2$. Os ângulos do vetor v com os eixos OY e OZ são iguais, logo:

$$(1/2, b, c).(0, 1, 0) = \cos\beta = \cos\rho = (1/2, b, c).(0, 0, 1)$$

Assim $b = c$ e como o vetor v tem norma igual a 1:

$$||\sqrt{1/4 + b^2 + b^2}|| = 1$$

,

$$b = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

. Teremos então o vetor

$$v = (\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{4}, \pm\frac{\sqrt{6}}{4})$$