Álgebra Linear I - Lista 2

Coordenadas e vetores

Respostas

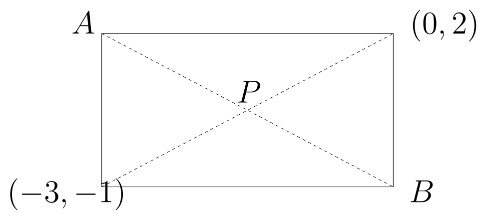
1) Sendo $A(1,-1,3)$ e $B(3,1,5)$, até que ponto se deve prolongar o segmento AB, no sentido de A para B, para que seu comprimento quadruplique de valor?

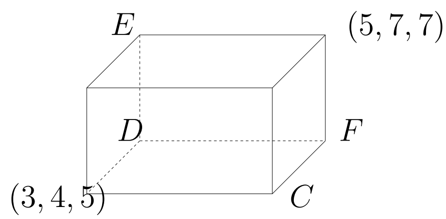
Resposta: Temos que
$$AB = (2,2,2)$$

O novo segmento:
$$AB' = t(AB)$$
tal que
$$||t(AB)|| = 4||AB||$$
Assim temos que :
$$|t| = 4$$
Como queremos no sentido de A para B temos que $t = 4$
$$AB' = (8,8,8)$$
$$B' - A = (8,8,8)$$
$$B' = (8,8,8) + (1,-1,3) = (9,7,11)$$

2) Encontre as coordenadas dos vértices A e B e do centro P do retângulo e dos vértices C, D, E e F do paralelepípedo (Observamos que os lados e as arestas das figuras são paralelos aos eixos coordenados).

Resposta:





- Paralelogramo: $A = (-3, 2)$, $B = (0, -1)$, e $P = (-3/2, 1/2)$.

- Paralelepıpedo: Observe que o ponto F está nos planos $z = 5$, $y = 7$ e $x = 5$. Portanto, $F = (5, 7, 5)$. Raciocinando de forma análoga temos $C = (3, 7, 5)$, $D = (5, 4, 5)$ e $E = (5, 4, 7)$.

3) Encontre as coordenadas dos vértices do quadrado inscrito na circunferência de raio dois centrada na origem, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados X e Y. Estes vértices determinam vetores u_1, u_2, u_3 e u_4. Determine as coordenadas de $u_1 + u_1$, $u_1 + u_2$, $u_1 + u_3$ e $u_1 + u_4$. Os extremos destes novos vetores determinam um quadrado?

Resposta: Os vértices são $\sqrt{2}(1, 1)$, $\sqrt{2}(1, -1)$, $\sqrt{2}(-1, 1)$ e $\sqrt{2}(-1, -1)$. Os vetores são: $\sqrt{2}(2, 2)$, $\sqrt{2}(2, 0)$, $\sqrt{2}(0, 2)$ e $(0, 0)$. Sim, os extremos destes vetores formam um quadrado. Vemos isto fazendo produtos escalares: os lados são paralelos aos vetores $(0, 1)$ e $(1, 0)$ (verifique este fato). Certamente, o produto escalar destes dois vetores é zero.

4) Determine as coordenadas:

- Do ponto de interseção das diagonais de um paralelogramo em função dos seus vértices. Faça o mesmo para um paralepípedo.

- Dos vértices de um tetraedro regular disposto no espaço do jeito que você quiser. Faça o mesmo para um cubo.

Resposta: Veremos primeiro o caso do paralelogramo. Suponha que os vértices são A, B, C e D e que Sejam $u = AB$ e $v = AC$ são vetores paralelos aos lados do paralelogramo. Em primeiro lugar faremos com $A = (0, 0)$. Temos que os pontos de uma diagonal são da forma $x(u + v)$, $x \in [0, 1]$ (faça uma figura para verificar). Os da outra diagonal são $v - y(v - u)$, $y \in [0, 1]$. A interseção portanto deverá verificar

$$x(u + v) = v + y(u - v), \quad (x - y)u = v(1 - x - y).$$

Como u e v não são paralelos teremos $x - y = 0$ e $1 - x - y = 0$. A solução é $x = 1/2 = y$. Portanto, o ponto de interseção é o de coordenadas $(u + v)/2$.

No caso geral, considerando que $u = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ e que $v = (c_1 - a - 1, c_2 - a_2)$ temos que o ponto é $A + (u + v)/2 = ((b_1 + c_1)/2, (b_2 + c{+}_2)/2$. Isto é, o ponto médio do segmento BC.

Raciocine de forma análoga no caso do paralelepípedo.

Para determinar as coordenadas dos vértices de um tetraedro determinaremos a base, deixando v. completar a construção. Tomaremos os dois primeiros vértices no eixo X, os pontos $A = (0, 0, 0)$ e $B = (1, 0, 0)$. Tomaremos um terceiro vértice C no plano $z = 0$. Este novo vértice equidista de A e B, logo é da forma $(1/2, y, 0)$. Determinaremos y observando que as distâncias de A a C e de B a C são iguais a 1. Temos duas opções: $C = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ e $C = (1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$. Escolhendo a primeira complete a construção.

5) Prove que os pontos médios de dois lados de um triangulo são ligados por um segmento então este lado é paralelo ao terceiro lado do triângulo e tem a metade de comprimento.

Resposta: Temos que se os vértices do triângulo são A, B e C então os pontos médios são

$$P = (A + B)/2, \quad Q = (A + C)/2, \quad \text{e} \quad R = (B + C)/2.$$

(Faça a figura. Agora a afirmação é óbvia: P e R determinam o vetor de coordenadas $(C - A)/2$ que é paralelo ao vetor $\overline{AC}$. Nos outros casos o raciocínio é análogo. A afirmação sobre o comprimento também segue do argumento anterior.