Álgebra Linear I - Lista 5

Equações de retas e planos. Posições relativas

1) Obtenha equações paramétricas e cartesianas:

- Das retas que contém aos pontos
  - $A = (2, 3, 4)$ e $B = (5, 6, 7)$,
  - $A = (-3, 1, 2)$ e $B = (6, 0, -2)$,
  - $A = (2, 5, 1)$ e $B = (3, 5, 1)$.
- Dos planos que contêm os pontos
  - $A = (2, 3, 4)$, $B = (5, 6, 7)$, e $C = (1, 1, 1)$
  - $A = (-3, 1, 2)$ e $B = (6, 0, -2)$, e $C = (0, 0, 0)$
  - $A = (2, 5, 1)$ e $B = (3, 5, 1)$, e $C = (1, 1, 1)$,
  - $A = (2, 3, 4)$, $B = (5, 6, 7)$, e $C = (3, 3, 3)$.

Determine (quando possível) a interseção das retas com os planos $\mathbb{XY}$, $\mathbb{XZ}$ e $\mathbb{YZ}$, e a interseção dos planos com os eixos coordenados $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Z}$.

2) Considere os pontos $A = (3, 5, 2)$, $B = (-1, -1, 4)$, $C = (2, 1, 5)$ e $D = (0, 3, 1)$, e as retas r_1 e r_2 que contêm, respectivamente, aos pontos A e B e C e D. Veja que estas retas r_1 e r_2 têm um ponto P em comum. Decida se o ponto P pertence aos segmentos de reta AB e CD.

3) Estude a posição relativa das retas

$$\begin{aligned} r_1 &= \{(x, y, z) = (1, 1, 7) + t(0, 1, 2);\ t \in \mathbb{R}\}, \\ r_2 &= \{(x, y, z) = (0, 4, 5) + s(-1, 5, 2);\ t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Se as retas se incerptam determine o ponto de interseção.

4) Determine equações cartesianas e paramétricas do plano que passa por $(1, -3, 2)$ e é ortogonal à reta $r = \{(1 - t, 2t - 3, 2 + t);\ t \in \mathbb{R}\}$.

5) Determine as equações cartesianas e paramétricas do plano π que passa por $A = (1, \frac{1}{2}, 0)$ e é ortogonal ao eixo x. Faça o mesmo com o plano ρ que passa por $A = (1, \frac{1}{2}, 0)$ e é ortogonal ao eixo y.

6) Considere a reta r_1 de equações paramétricas

$$r_1\colon (2t, 1+t, -1-t) \quad t \in \mathbb{R}$$

e a reta r_2 de equações cartesianas

$$x + 2y - 2z = 1, \quad x - y = 2.$$

a) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos π e ρ (escritos em equações cartesianas) tais que π seja paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e ρ seja paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$.

b) Determine uma equação paramétrica da reta r_2.

c) Determine a posição relativa das retas r_1 e r_2 (reversas, paralelas ou se interceptam).

7) Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 2, 2)$ e $C = (2, 1, 2)$.

a) Determine a área do triângulo T de vértices A, B e C.

b) Determine um vetor normal ao plano π que contém os pontos A, B e C.

c) Determine equações paramétricas do plano π.

d) Determine uma equação cartesiana do plano π.

e) Determine um ponto D tal que os pontos A, B, C e D formem um paralelogramo P.

f) Determine a área do paralelogramo P do item anterior.

8) Considere os planos

$$\pi\colon\ 2x - 3y + z = 1, \quad \pi'\colon x + 2y + 2z = k.$$

Determine k para que a interseção dos planos seja uma reta que passa pelo ponto $(1, 1, 2)$.

9) Considere os planos

$$\pi\colon 2x - 3y + 2z = 1, \quad \pi'\colon ax - 12y + cz = d.$$

Se possível, determine a, b, c e d para que a interseção dos planos seja:

- o conjunto vazio (ou seja, os planos não se interceptam),
- um ponto,
- uma reta,
- um plano.

10) Considere os planos

$$\pi\colon 2x + y - z = 1, \quad \pi'\colon x + 3y - z = -1.$$

a) Encontre um terceiro plano ρ tal que a interseção dos três planos π, π' e ρ seja um único ponto;

b) Encontre um terceiro plano τ tal que a interseção dos três π, π' e τ planos seja uma reta;

c) Encontre um terceiro plano γ tal que a interseção dos três planos π, π' e γ seja vazia.

11) Dado o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ 4x & + & 2y & - & 6z & = & 8 \\ x & + & 3y & - & 9z & = & 12 \end{array}\right.$$

estude a existência de soluções. Interprete geometricamente a sua resposta.

12) Mostre que os planos π_1, π_2, π_3 sempre sempre se interceptam em um ponto, independentemente dos valores de a, b, c e k.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \pi_1\colon & x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ \pi_2\colon & 2x & + & 4y & + & z & = & b \\ \pi_3\colon & 3x & + & 2y & + & kz & = & c \end{array}$$