$\boxed{\textbf{Álgebra Linear I - Lista 4}}$

Determinantes. Produto vetorial

1) Calcule os determinantes a seguir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 18 & 18 & 19 \\ 27 & 27 & 18 \end{vmatrix}.$$

2) Veifique que os determinantes

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha - \cos\alpha & \sin\alpha + \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha - \cos\alpha & \sin\alpha + \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

não dependem de θ.

3) Sem calcular diretamente, mostre que $x = 0$ e $x = 2$ satisfazem a equação

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Sem desenvolver o determinante, determine se existem outras soluções.

4) Sem calcular diretamente, mostre as igualdades a seguir:

a)

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

b)

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5) Considere os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

a) Determine $e_1 \times e_2$, $e_2 \times e_3$, $e_3 \times e_1$, $e_2 \times e_1$;

b) Os vetores $e_1 \times (e_1 \times e_2)$ e $(e_1 \times e_1) \times e_2$ são iguais?

6) Calcule as áreas dos paralelogramos gerados pelos seguintes vetores:

a) $u = (2, 1, 3)$, $v = (-1, 2, -1)$;

b) $u = (3, -2, 0)$, $v = (-1, 0, 0)$;

c) **c)** $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -1)$.

7) Dados vetores u, v e w (não coplanares) mostre que $u \times (v \times w) = \alpha v + \beta w$.

Suponha agora que $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, 0, 0)$ e $w = (a_3, b_3, 0)$. Prove que $\alpha = u \cdot w$ e $\beta = -u \cdot v$.

8) Suponha que $u \cdot (v \times w) = 3$. Calcule

- $u \cdot (w \times v)$,
- $(v \times w) \cdot u$,
- $w \cdot (u \times v)$,
- $v \cdot (u \times w)$,
- $v \cdot (w \times w)$.

9) Mostre que para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$, os vetores $\mathbf{i} \times v$, $\mathbf{j} \times v$ e $\mathbf{k} \times v$ são coplanares.

10) Responda as seguintes questões:

- Simplifique o máximo possível a expressão $(u + v) \times (u - v)$.

- Considere vetores coplanares u, v, w e k. Calcule $(u \times v) \times (w \times k)$.

11) Estude a veracidade das afirmações a seguir:

a) Existem vetores não nulos $\bar{u}$ e $\bar{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que $\bar{u} \cdot \bar{w} = 0$ e $\bar{u} \times \bar{w} = \bar{0}$.

b) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 2, 2) \times (a, 1, a) = (0, 0, 0)$.

c) Considere dois vetores $\bar{w}$ e $\bar{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que $w \times v = \bar{0}$. Então $w \cdot v = |w|\,|v|$.

d) Considere vetores $\bar{v}$ e $\bar{w}$ de $\mathbb{R}^3$. Então

$$\bar{v} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{v} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{0} \times \bar{w} = \bar{0}.$$

e) Considere um vetor $u \neq 0$. Suponha que $u \times v = u \times w$. Então, $v = w$?