$\boxed{\text{Álgebra Linear I - Lista 3}}$

Produto escalar. Ângulos. Ortogonalidade

1) Nenhuma das expressões a continuação tem sentido. Explique o que há de errado em cada expressão. Sejam u, v, w e n quatro vetores, α um número e "$\underline{\cdot}$" o produto escalar.

- $u \cdot v \cdot w = 5$,
- $u \cdot v \cdot w = n$,
- $(u \cdot v) + w$,
- $\alpha \cdot (u \cdot v)$.

2) Determine os ângulos do triângulo cujos vértices são

$$A = (3, 2, 1), \quad B = (3, 2, 2) \quad \text{e} \quad C = (3, 3, 2).$$

3) Seja $\bar{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ um vetor unitário, onde α, β e γ são números diferentes de zero. Determine t de forma que os vetores

$$\bar{v} = (-\beta\, t, \alpha\, t, 0), \quad \bar{w} = (\alpha\, \gamma\, t, \beta\, \gamma\, t, -1/t)$$

e $\bar{u}$ sejam unitários e dois a dois ortogonais.

4) Responda as seguintes questões:

- Encontre, se possível, dois vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ do plano tais que os vetores $\bar{u} + \bar{v}$ e $\bar{u} - \bar{v}$ tenham o mesmo modulo.
- Mostre que se os vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ tem o mesmo módulo então os vetores $(\bar{u}+\bar{v})$ e $(\bar{u}-\bar{v})$ são ortogonais. Usando este fato, prove que as diagonais de um losango são perpendiculares.

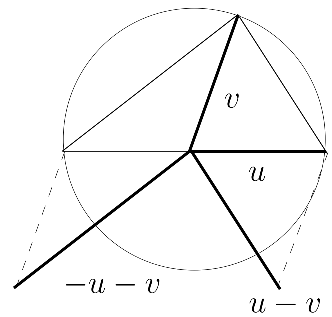

Figura 1:

5) Use o produto escalar para provar que o ângulo inscrito em um semicírculo é reto. Veja a Figura 1.

6) Sejam $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ os vetores unitários $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Considere o vetor $v=(a,b,c)$ e defina α, β e γ como os ângulos do vetor v com os vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente.

- Determine $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ (os denominados *cossenos diretores de* v).
- Mostre que $\dfrac{v}{||v||}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.
- Como consequência obtenha $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
- Considere um vetor w com cossenos diretores $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$ e $\cos\gamma'$. Mostre que v e w são perpendiculares se, e somente se, $\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0$.

7) Sejam u e v dois vetores de módulo k e ℓ, respectivamente. Considere o vetor $w = \ell u + kv$. Mostre que este vetor bissecta o ângulo entre u e v (isto é, os ângulos entre w e u e entre w e v são iguais).

8) Considere dois vetores u e v não paralelos. Verifique que os vetores

$$u' = u / \parallel u \parallel \quad \text{e} \quad v' = v - (v \cdot u')\, u'$$

são ortogonais.

9) Considere três vetores e_1, e_2 e e_3 de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\parallel e_1 \parallel = \parallel e_2 \parallel = \parallel e_3 \parallel = 1 \quad \text{e} \quad e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0.$$

Sejam u e v vetores em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$u = 3e_1 + 4e_2, \quad \parallel v \parallel = 5 \quad \text{e} \quad v \cdot e_3 \neq 0.$$

Utilizando estas informações, calcule o ângulo entre os vetores $u + v$ e $u - v$. O que pode dar errado se $v \cdot e_3 = 0$?

10) Considere u, v e w vetores não nulos, com $u \cdot v = u \cdot w$. Mostre por um exemplo que não necessariamente temos $v = w$.

11) Considere os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-5, 9)$. Ache um vetor não nulo $w = \alpha u$ tal que o vetor $(v - w)$ seja ortogonal ao vetor u.

Resolva agora o mesmo problema no caso geral: considere vetores não nulos u, v e $w = \alpha u$. Determine α para que o vetor $(v - w)$ seja ortogonal ao vetor u?

12 Os quatro vértices a seguir determinam um tetraedro regular: $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 1, 1)$ e $D = (1, 1, 0)$. Se E é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, determine qual dos ângulos $\widehat{AED}$ ou $\widehat{CBA}$ é o menor.

13)Um vetor unitário v forma com o eixo coordenado OX um ângulo de $60°$ e com os outros dois eixos OY e OZ ângulos congruentes. Calcule as coordenadas de v.