Álgebra Linear I - Lista 9

Matrizes e Transformações lineares

1) Sejam A e B matrizes quadradas do mesmo tamanho.

- Dê um exemplo onde $(A+B)^2 \neq A^2 + 2A\,B + B^2$.
- Complete: $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + [?]$ (determine $[?]$).
- Dê um exemplo onde $(A-B)^2 \neq A^2 - 2A\,B + B^2$.
- Complete: $(A-B)^2 = A^2 + B^2 + [?]$ (determine $[?]$).

2) Encontre, se possível, matrizes A e B, 3×3, tais que, para todo vetor coluna 3×1, se verifique

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Estude se existem matrizes A, 2×1, e B, 1×2, tais que o produto $A\,B$ seja a identidade.

4) Estude se a seguinte afirmação é verdadeira. A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tem sempre determinante não nulo (independentemente do valor de a).

5) Seja A uma matriz quadrada. Dizemos que uma matriz (quadrada) B é uma raiz quadrada de A se $B^2 = B\,B = A$.

- Encontre duas raízes quadradas de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Encontre quatro raízes quadradas da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Estude se a seguinte afirmação é verdadeira: toda matriz 2×2 possui no mínimo uma raiz quadrada.

- Estude se a seguinte afirmação é verdadeira. Represente por 0 a matriz com todas as entradas nulas. Se $AA = 0$ então $A = 0$.

6) Determine as matrizes das seguintes transformações lineares:

1. $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $S(u) = u \times (1,1,1)$, (exercício 3, lista 10);
2. $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $M(v) = (v \cdot u)u$, onde $u = (1,1,1)$, (exercício 4, lista 10);
3. $N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $N(v) = (v \cdot u)$, onde $u(1,1,1)$,
4. $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $L(1,1,1) = (6,3)$, $L(2,1,0) = (5,1)$ e $L(2,0,1) = (7,2)$;
5. $K\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $K(v) = (v \times w) \times w$, onde $w = (1,1,1)$.

7) Considere a base $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)$ e para cada vetor v escreva

$$v = v_1(1,1,1) + v_2(1,1,0) + v_3(0,1,1).$$

Considere $T_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação definida como

$$T_\beta(v) = v_1(1,1,1) + v_2(1,1,0).$$

- Veja que T_β é uma transformação linear.
- Determine a forma geral de $T_\beta(x,y,z)$ e a matriz associada a T_β.
- Interprete T_β como uma projeção.
- Encontre uma base β' tal que a transformação $T_{\beta'}$ (definida como acima) seja uma projeção ortogonal em um plano.

8) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$.

$$u_1 = (1, 1, 2), \quad u_2 = (2, 0, 1)$$

e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = (v \cdot u_1)\, u_1 + (v \cdot u_2)\, u_2.$$

(a) Determine a matriz de T na base canônica.

(b) Determine o conjunto de vetores v tais que $T(v) = v$.

(c) Determine a equação cartesiana da imagem de T.

(d) Considere o plano

$$\mathbb{V}\colon x + y + 2\,z = 0.$$

Determine uma base do subespaço $T(\mathbb{V})$, a imagem do plano $\mathbb{V}$ pela transformação linear T.

9)

a) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & c \\ 2 & b & d \end{pmatrix}.$$

Sabendo que o espaço imagem de T é uma reta determine os valores de a, b, c e d.

b) Considere a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & A & C \\ 2 & B & D \end{pmatrix}.$$

Determine explicitamente valores A, B, C e D para que a imagem de L seja o plano de equação cartesiana

$$x + y - z = 0.$$

c) Considere a transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$M(1,1,1) = (0,1,1), \quad M(1,0,1) = (2,1,1), \quad M(0,1,1) = (0,1,1)$$

Determine a matriz de M na base canônica.