Álgebra Linear I - Lista 8

Transformações lineares

1) Estude quais transformações abaixo são transformações lineares:

- $T(x, y, z) = (x + y - 1,\, z)$,
- $T(x, y, z) = x + y - 1$,
- $T(x, y, z) = (x + y - 1,\, x - 2z, x + z,\, 0)$,
- $T(x, y, z) = (x + y,\, z)$,
- $T(x, y, z) = x + y$,
- $T(x, y, z) = (x + y,\, x - 2z,\, x + z,\, 0)\,.$

2) Decida se a afirmaçõoes a seguir são verdadeiras ou falsas:

1. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação tal que para todo par de vetores v e u de $\mathbb{R}^3$ e todo par de números reais λ e σ se verifica

   $$T(\lambda\, u + \sigma\, v) = \lambda\, T(u) + \sigma\, T(v),$$

   então T é uma transformação linear.

2. Seja u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$, então existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = -u$.

3. Existe uma única transformação linear tal que para todo par de vetores u e v, $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

   $$T(u + v) = T(u) - T(v).$$

4. Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

   $$T(u + v) = T(u) + 2\,T(v)$$

   para todo par de vetores u e v.

5. Seja u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$. Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = 2\,T(u)$.

6. Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$T(1,0,0) = (1,1), \quad T(1,1,0) = (1,1), \quad T(1,1,1) = (1,1).$$

7. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação tal que $T(\sigma\, u) = \sigma\, T(u)$ para todo vetor u de $\mathbb{R}^2$, então T é linear.

3) Considere o conjunto de vetores $\beta = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

- Verifique que β é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- Determine as coordenadas do vetor $v = (1,2,3)$ na base β.
- Considere a aplicação S definida por
$$S(u) = u \times (1,1,1).$$
Estude se S é transformação linear.
- Determine os vetores u tais que $S(u) = u$.
- Determine dois vetores u e v não nulos tais que $S(u) = S(v) \neq \bar{0}$.
- Estude se S é sobrejetora (isto é, a imagem de S é $\mathbb{R}^3$). Determine a imagem de S.

4) Considere um vetor unitário u de $\mathbb{R}^3$. Considere as transformações seguintes
$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = (v \cdot u)\, u,$$
$$S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad S(v) = v - (v \cdot u)\, u.$$

- Estude se S e T são transformações lineares e interprete geometricamente.
- Considere o vetor $u = (1,1,1)$ e $T\colon \mathbb{R}^3 \to R^3$, definida por
$$T(v) = (v \cdot u)\, u.$$
Determine a forma geral de T.

- Determine o conjunto de vetores v tais que $T(v) = \bar{0}$.

- Determine se T e S são injetoras e/ou sobrejetoras. Determine as imagens de T e de S.

- Interprete T geometricamente.

5) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Sabendo que

$$T(1,0) = (2,-2) \quad \text{e} \quad T(0,1) = (0,-1),$$

- determine a forma geral de T,

- calcule $T(1,1)$, $T(2,2)$ e $T(1,2)$.

- Determine as imagens dos triângulos Δ_1 de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ e $(2,1)$, e Δ_2 de vértices $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,3)$.

6) Estude se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades:

- $$\begin{array}{ll} T(1,0,0) = (2,2,2), & T(1,1,0) = (3,3,3), \\ T(1,1,1) = (4,4,4), & T(2,0,1) = (1,2,3). \end{array}$$

- T transforma todo vetor do plano $x + y + z = 0$ no vetor nulo, a reta $(t, 2t, 3t)$ na reta (t,t,t) e o vetor $(1,1,1)$ no vetor $(2,2,2)$.

- T transforma todo vetor do plano $x + y + z = 0$ no vetor nulo, a reta $(t, 2t, 3t)$ na reta (t,t,t) e o vetor $(1,1,1)$ no vetor $(1,2,3)$.

Nos casos em que a transformação linear exista dê um exemplo de tal transformação, determinando $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$.

7) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação qua associa a cada vetor $v = (a,b)$ o vetor $T(v) = 0P$, onde P é a interseção da reta $r = \{(t, 2t),\ t \in \mathbb{R}\}$ e a reta que contém ao ponto (a,b) e é paralela ao vetor $(1,1)$.

- Veja que T é uma transformação linear e determine a forma geral de $T(x,y)$.

- Determine o conjunto de vetores que se transformam no $(0,0)$.
- Escreva agora cada vetor v da forma $v = \lambda\,(1,1) + \mu\,(1,2)$. Relacione $T(v)$ e $\mu\,(1,2)$.