# P3 de Álgebra Linear I – 2002.2

Data: 23 de novembro de 2002

**Gabarito**

**1)** Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale $-0.2$, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão $-0.2$.

| Itens | **V** | **F** | **N** |
|---|---|---|---|
| 1.a | V | | |
| 1.b | | F | |
| 1.c | V | | |
| 1.d | V | | |
| 1.e | V | | |
| 1.f | | F | |
| 1.g | V | | |
| 1.h | V | | |
| 1.i | | F | |

**1.a)** Seja $A$ uma matriz simétrica inversível. Então sua inversa também é simétrica.

**Verdadeiro:** Observe que todo autovetor $u$ de $A$ é autovetor de $A^{-1}$ (se $A(u) = \lambda\, u$ então $A^{-1}(u) = \lambda^{-1}\, u$). Portanto, como $A$ é simétrica, possui uma base ortonormal de autovetores, que também são autovetores de $A^{-1}$, e isto carateriza ser simétrica.

Outra forma de justificar, seja $B$ a inversa de $A$. Então $AB = I = BA$. Logo

$$(AB)^t = I^t = (BA)^t, \quad B^t A^t = I = A^t B^t.$$

Mas $A^t = A$, logo $B^t A = I$, donde

$$B^t = B^t I = B^t(AB) = (B^t A)B = IB = B,$$

portanto $B^t = B$ e $B = A^{-1}$ é simétrica.

**1.b)** O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

**Falso:** Considere, por exemplo, os produtos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1.c)** O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

**Verdadeiro:** Lembre que o fato de uma matriz ser ortogonal está caracterizado por preservar o produto escalar, isto é, a matriz $A$ é ortogonal se, e somente se,

$$A(u) \cdot A(v) = u \cdot v$$

para todo par de vetores $u, v$.

Sejam agora $A$ e $B$ matrizes ortogonais. Pelo comentário anterior, é suficiente verificar que

$$(AB)(u) \cdot (AB)(v) = u \cdot v$$

para todo par de vetores $u$ e $v$. Como $A$ e $B$ são ortogonais,

$$A(u) \cdot A(v) = u \cdot v \quad \text{e} \quad B(u) \cdot B(v) = u \cdot v$$

para todo par de vetores $u$ e $v$. Portanto,

$$(AB)(u) \cdot (AB)(v) = A(B(u)) \cdot A(B(v)) = B(u) \cdot B(v) = u \cdot v,$$

o que prova a afirmação.

**1.d)** A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 77777 & 88888 & 99999 \\ 88888 & 77777 & 55555 \\ 99999 & 55555 & 77777 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

**Verdadeiro:** Se trata de uma matriz simétrica, portanto diagonalizável.

**1.e)** A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 111 & 222 & 333 \\ 222 & 444 & 666 \\ 333 & 666 & 999 \end{pmatrix}$$

tem autovalores 0 (de multiplicidade 2) e $111 + 444 + 999 = 1554$.

**Verdadeiro:** Observe que se trata de uma matriz simétrica. Portanto, dianalizável. Como as linhas são proporcionais (a segunda linha é obtida multiplicando por dois a primeira, e a terceira linha é obtida multiplicando por três a primeira), o determinante é nulo. Como o determinante é o produto dos autovalores (contados com multiplicidade), existe um autovalor nulo. Os autovetores associados a 0 são os vetores não nulos do plano

$$111\,x + 222\,y + 333\,z = 0.$$

Como a matriz é diagonalizável, 0 é um autovalor de $A$ de multiplicidade dois. Finalmente, usando que a soma dos autovalores contados com multiplicidade é o traço, temos que, se $\lambda$ é o terceiro autovalor,

$$0 + 0 + \lambda = 111 + 444 + 999 = 1554,$$

o que prova a afirmação.

**1.f)** Seja $R$ uma rotação de $\mathbb{R}^3$ de ângulo $\alpha$ e eixo de rotação a reta $r$ que contém a origem. Então, para todo vetor não nulo $u$ de $\mathbb{R}^3$, se verifica que o ângulo entre $u$ e $R(u)$ é $\alpha$.

**Falso:** A afirmação somente é verdadeira se o vetor é perpendicular ao eixo de rotação. Por exemplo, se $u$ é paralelo ao eixo, independentemente do ângulo de rotação, se verifica $R(u) = u$. Portanto, o ângulo entre $u$ e $R(u)$ é zero.

**1.g)** Seja $A$ uma matriz simétrica $3 \times 3$ e os vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, -2, 1)$ autovetores de $A$ cujos autovalores são 1763 e 23578. Então $(1, 0, -1)$ é um autovetor de $A$.

**Verdadeiro:** Como a matriz é simétrica, possui uma base ortogonal de autovetores. Como $(1, 1, 1)$ e $(1, -2, 1)$ são autovetores, seu produto vetorial é um autovetor. Observe que

$$(1, 1, 1) \times (1, -2, 1) = (3, 0, -3).$$

Logo $(1, 0, -1)$ (que é paralelo a $(3, 0, -3)$) é uma autovetor de $A$.

**1.h)** Seja $A$ uma matriz simétrica $3 \times 3$ cujo determinante é 30. Suponha que 3 e 5 são autovalores de $A$. Então o traço de $A$ é 10.

**Verdadeiro:** Sejam $\lambda$, $\sigma$ e $\rho$ os autovalores de $A$. Temos

$$\lambda + \sigma + \rho = \text{traço}(A) \quad \text{e} \quad \lambda\, \sigma\, \rho = \det(A).$$

Portanto, fazendo $\lambda = 3$ e $\sigma = 5$, e como $\det(A) = 30$, temos que $\rho = 2$. Logo

$$\text{traço}(A) = 5 + 3 + 2 = 10,$$

o que prova a afirmação.

**1.i)** Suponha que $A$ é uma matriz $3 \times 3$ tal que $A^2$ é simétrica. Então $A$ é simétrica.

**Falso:** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que não é simétrica. Observe que

$$A^2 = A\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é simétrica.

**2)** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{pmatrix}.$$

**(2.a)** Estude que condições devem satisfazer os números reais $a$ e $b$ para que a matriz seja ortogonal.

**(2.b)** Veja se é possível escolher $a$ e $b$ para que a matriz $A$ represente um espelhamento.

**Resposta:**

**(2.a)** Os vetores $(a+b, a-b)$ e $(b-a, a+b)$ devem ser ortogonais e unitários. Ou seja

$$(a+b, a-b) \cdot (b-a, a+b) = (a+b)(b-a) + (a-b)(a+b) = (b^2-a^2) + (a^2-b^2) = 0.$$

Logo a condição de ortogonalidade é sempre verificada. Para ver que os vetores são unitários,

$$(a+b, a-b) \cdot (a+b, a-b) = a^2 + b^2 + 2\,a\,b + a^2 + b^2 - 2\,a\,b = 2\,(a^2+b^2) = 1.$$

Analogamente,

$$(b-a, a+b) \cdot (b-a, a+b) = b^2 + a^2 - 2\,a\,b + a^2 + b^2 + 2\,a\,b = 2\,(a^2+b^2) = 1.$$

Ou seja, a condição é

$$a^2 + b^2 = 1/2.$$

**(2.b)** Para a segunda parte, se a matriz representa um espelhamento, deve ser simétrica, ou seja,

$$a - b = b - a, \quad 2\,a = 2\,b, \quad a = b.$$

Ou seja, a matriz é da forma,

$$A = \begin{pmatrix} 2\,a & 0 \\ 0 & 2\,a \end{pmatrix}.$$

Onde $a$ deve ser $a = \pm(1/2)$. Ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Em nenhum dos casos representa um espelhamento. Logo a resposta é: não é possível escolher $a$ e $b$ de forma que$A$ represente um espelhamento.

**3)** Estude que tipo de transformações representam as matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**(3.a)** No casos envolvendo projeções determine a reta ou plano de projeção, nos casos envolvendo espelhamentos determine o plano ou reta de espelhamento, e nos casos envolvendo rotações determine o ângulo e o eixo de rotação.

**(3.b)** Determine quais das matrizes $A$ e $C$ são diagonalizáveis. Nos casos afirmativos determine a forma diagonal.

**Resposta:**

**(3.a)** Observe que a matriz

$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\operatorname{sen}\pi/4 & 0 \\ \operatorname{sen}\pi/4 & \cos\pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representa, na base canônica, uma rotação de ângulo $\pi/4$ em torno do eixo $\mathbb{Z}$. Analogamente, dada uma base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$, a matriz $E$ (na base $\beta$) representa uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo paralelo ao vetor $v_3$.

Considere agora a base canônica $\mathcal{E}$ e a base ortonormal $\gamma$ dada por

$$\gamma = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

Observe que a matriz ortogonal

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

representa a matriz de mudança de base da base canônica à base $\gamma$.

Observe que $P^{-1} = P^t$ e que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

representa a mudança de base da base $\gamma$ à base canônica. Logo

$$A = P^{-1} E P$$

representa uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo a reta $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Finalmente, observe que a matriz $C$ é simétrica, não ortogonal (o produto escalar das duas primeiras colunas é não nulo), e tem traço $1/9(8+5+5) = 18/9 = 2$. Logo a matriz $C$ é candidata a representar uma projeção em um plano (espelhamentos e rotações correspondem a matrizes ortogonais, e projeções ortogonais em um uma reta têm traço 1). Em tal caso, $C(1,0,0)$ e $C(0,1,0)$ pertencem ao plano de projeção, logo $(4,1,1)$ e $(2,5,-4)$ seriam dois vetores paralelos ao plano. Verifiquemos que $C(4,1,1) = (4,1,1)$ e $C(2,5,-4) = (2,5,-4)$:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (32+2+2)/9 \\ (8+5-4)/9 \\ (8-4+5)/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (16+10-8)/9 \\ (4+25+16)/9 \\ (4-20-20)/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o outro autovalor de $C$ é zero ($\lambda = 1$ tem multiplicidade dois e o traço é 2) e o vetor normal ao plano $\pi$ paralelo aos vetores acima é um autovetor (lembre que $A$ é simétrica): este vetor é:

$$(4,1,1) \times (2,5,-4) = (-9,18,18),$$

logo $(1,-2,-2)$ é um autovetor de $C$ de autovalor 0. Logo $C$ representa uma projeção ortogonal no plano $x-2y-2z=0$.

**(3.b)** A matriz $A$ é semelhante a matriz de rotação $E$ que não é diagonalizável. Portanto, $A$ não é diagonalizável.

Finalmente, a matriz $C$ é simétrica, portanto diagonalizável. Como seus autovalores são 0 (simples) e 1 (de multiplicidade 2), uma forma diagonal de $C$ é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4)** Considere as bases $\beta=\{(7)\}$ e $\gamma=\{(3)\}$ de $\mathbb{R}$. Considere também a base canônica $\mathcal{E}=\{(1)\}$ de $\mathbb{R}$. Determine:

**(4.a)** As matrizes de mudança de base da base $\beta$ à base canônica e da base $\gamma$ à base canônica.

**(4.b)** A matriz de mudança de base da base $\beta$ à base $\gamma$.

**Resposta**

**(4.a)** Lembre que se $\rho$ é uma base, a matriz de mudança de base da base $\rho$ à base canônica tem por colunas os vetores da base $\rho$ expressados na base canônica. Portanto,

- a matriz de mudança da base $\beta$ à base canônica é a matriz $1\times 1$ $M=(7)$,
- a matriz de mudança da base $\gamma$ à base canônica é a matriz $1\times 1$ $N=(3)$.

Isto também implica,

- a matriz de mudança da base canônica à base $\beta$ é a inversa de $M$, $M^{-1}=(1/7)$,
- a matriz de mudança da base canônica à base $\gamma$ é a inversa de $N$, $N^{-1}=(1/3)$.

**(4.b)** Finalmente, para calcular a mudança de base da base $\beta$ à base $\gamma$ faremos o seguinte:

- mudaremos de $\beta$ à base canônica, matriz $M$,
- mudaremos da base canônica à base $\gamma$, matriz $N^{-1}$.

O resultado sera a matriz produto:

$$N^{-1}M = (1/3)(7) = (7/3).$$

**5)** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 3 é um autovalor de $A$:

**(5.a)** Determine todos os autovalores de $A$.

**(5.b)** Determine, se possível, uma base ortonormal de autovetores de $A$.

**(5.c)** Encontre, se possível, uma forma diagonal $D$ de $A$.

**(5.d)** Determine explicitamente matrizes $P$ e $P^{-1}$ tais que $A = PDP^{-1}$, onde $D$ é diagonal.

**Resposta:**

**(5.a)** Para determinar os autovalores há duas possibilidades. A primeira é calcular o polinômio característico da matriz:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) + (-(2-\lambda) - 1) - (1 + (2-\lambda)) = \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) + \lambda - 3 + \lambda - 3 = \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda)^2 - 4\lambda + 3\right) + 2\,\lambda - 6 = \\
&= -\lambda^3 + 6\,\lambda^2 - 9\,\lambda = \\
&= -\lambda\,(\lambda^2 - 6\,\lambda + 9) = -\lambda\,(\lambda - 3)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, os autovalores são 3 (de multiplicidade 2) e 0, de multiplicidade 1. Observe que v. não usou o dado $\lambda = 3$ *é um autovalor.*

Outra possibilidade, especialmente se v. não gosta de polinômios característicos, é calcular os autovetores de 3, para isto devemos resolver o sistema,

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & -1 \\ -1 & 2-3 & -1 \\ -1 & -1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução é o plano

$$x + y + z = 0.$$

Como $A$ é simétrica, isto implica que 3 tem multiplicidade 2 (pois existem dois autovetores l.i. associados a 3 e não existem três autovetores l.i.). Agora, como o traço de $A$ é 6, temos que se $\sigma$ é o outro autovetor,

$$3 + 3 + \sigma = 6, \quad \sigma = 0.$$

Para usos posteriores, observe que os cálculos feitos implicam que os autovetores associados a 0 são paralelos a $(1, 1, 1)$ (o vetor normal do plano de autovetores -excluido o vetor nulo- de 3).

**(5.b)** Os cáculos feitos acima implicam que $(1, -1, 0)$ é um autovetor de 3 e $(1, 1, 1)$ é um autovetor de 0. Como $A$ é simétrica, seu produto vetorial $(1, 1, 1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, -2)$ é um autovetor de $A$ (necessariamente associado a 3). Normalizando obtemos uma base ortonormal de autovetores de $A$:

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}.$$

**(5.c)** Uma forma diagonal $D$ de $A$ terá a diagonal formada pelos autovalores de $A$ considerados com multiplicidade. Por exemplo,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**(5.d)** Considerando $D$ como no acima, as colunas de $P$ são os autovetores associados a 0, 3 e 3. Ou seja

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Como, por construção, $P$ é ortogonal (suas colunas formam uma base ortonormal de autovetores), sua inversa é a transposta, logo

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$