Prova tipo D

P4 de Álgebra Linear I – 2003.2
Gabarito

1) Considere o ponto $P=(2,1,0)$, a reta r de equação paramétrica

$$r\colon (3-2t, 5+t, 2+2t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

a) Escreva r como intereseção de dois planos (equação cartesiana) ρ e α, ρ paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e α paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$.

b) Determine a equação cartesiana do plano τ que contém a reta r e o ponto P.

c) Encontre, caso exista, o ponto R de interseção da reta r acima e da reta

$$r'\colon (1+2t, 2+t, 2-t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Caso o ponto não exista escreva *as retas são reversas.*

d) Calcule a distância d entre o ponto P e a reta r.

Respostas:

a) $\rho\colon\ -2y+z=-8$, $\alpha\colon x+z=5$.

b) $\tau\colon 2x-2y+3z=2$.

c) $R=(5,4,0)$.

d) $d=\sqrt{17}$.

2) Considere a base $\beta = \{u_1 = (1,0,1); u_2 = (1,1,0); u_3 = (1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear T, $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida como segue: dado um vetor w da forma $w = a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3$ temos $T(w) = (3a + b + 2c)\,u_2$.

a) Determine (explicitamente) a matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

b) Determine (explicitamente) a matriz $[T]_\epsilon$ de T na base canônica.

c) Determine (explicitamente) as matriz $[M]$ de mudança de base da base β à base canônica..

d) Considere agora o plano $\pi\colon x + y + z = 0$ e a base ξ do plano π, $\xi = \{(1,-2,1); (2,-1,-1)\}$. Determine as coordenadas $(w)_\xi$ do vetor $w = (7,-8,1)$ na base ξ.

Respostas:

a)

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$[T]_\epsilon = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $(w)_\xi = (3,2)$.

3) Considere a projeção P no plano π

$$\pi\colon x - 2y + 2z = 0$$

na direção do vetor v

$$v = (1,0,1).$$

a) Determine a matriz $[P]$ da projeção P na base canônica.

b) Encontre uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[P]_\beta$ na base β seja

$$[P]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Respostas:

a)

$$[P] = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) $\beta = \{(2,1,0); (1,0,1); (2,0,-1)\}$

4) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Escolha qual das afirmações a seguir é verdadeira para que a matriz M **não seja diagonalizável**.

$b = 3$ e $a = 1$	
$b = 1$ e $a = 1$	
$b = 3$ e $a = 2$	
$b = 0$ e a qualquer número real	
nenhuma, M é sempre diagonalizável	x
todas as afirmações anteriores são falsas	
não sei	

5) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que a matriz $[T]_\epsilon$ de T na base canônica é simétrica. Sabendo que

- $T(1,0,1) = (2,0,2)$,
- todo vetor não nulo do plano $x + z = 0$ é um autovetor,
- o determinante de $[T]_\epsilon$ é 32, e
- o traço de $[T]_\epsilon$ é negativo.

Determine os autovalores de T com suas multiplicidades.

Resposta:

autovalores 2 e -4, 2 simples e -4 duplo ou de multiplicidade dois.

6) Considere a transformação linear T cuja matriz $[T]$ na base canônica é o produto das matrizes

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

A transformação linear T é:

(e) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$ seguida do espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	N
				x										