Prova tipo A

P4 de Álgebra Linear I – 2003.2

Gabarito

1) Considere o ponto $P = (2, 1, 0)$, a reta r de equação paramétrica

$$r\colon (1 + t, 2 - t, 1 + 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Escreva r como intereseção de dois planos (equação cartesiana) ρ e α, ρ paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e α paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$.

b) Determine a equação cartesiana do plano τ que contém a reta r e o ponto P.

c) Encontre, caso exista, o ponto R de interseção da reta r acima e da reta

$$r'\colon (4 - t, 3 - t, -1 + 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso o ponto não exista escreva *as retas são reversas.*

d) Calcule a distância d entre o ponto P e a reta r.

Respostas:

a) $\rho\colon 2y + z = 5$, $\alpha\colon 2x - z = 1$.

b) $\tau\colon x + y = 3$.

c) $R = (2, 1, 3)$.

d) $d = \sqrt{3}$.

2) Considere a base $\beta = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,1,0); u_3 = (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear T, $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida como segue: dado um vetor w da forma $w = a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3$ temos $T(w) = (a + 2b + 3c)\,u_1$.

a) Determine (explicitamente) a matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

b) Determine (explicitamente) a matriz $[T]_\epsilon$ de T na base canônica.

c) Determine (explicitamente) a matrizes $[M]$ de mudança de base da base β à base canônica.

d) Considere agora o plano $\pi\colon x - y - z = 0$ e a base ξ do plano π

$$\xi = \{(1,2,-1); (2,1,1)\}.$$

Determine as coordenadas $(w)_\xi$ do vetor $w = (5,7,-2)$ na base ξ.

Respostas:

a)

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$[T]_\epsilon = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $(w)_\xi = (3,1)$.

3) Considere a projeção P no plano π

$$\pi\colon x - y + 2z = 0$$

na direção do vetor v

$$v = (1, 1, 1).$$

a) Determine a matriz $[P]$ da projeção P na base canônica.

b) Encontre uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[P]_\beta$ na base β seja

$$[P]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Respostas:

a)

$$[P] = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\beta = \{(1,1,0); (1,1,1); (0,2,1)\}$

4) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Escolha qual das afirmações a seguir é verdadeira para que a matriz M **não seja diagonalizável**.

$b = 1$ e $a = 1$	
$b = 2$ e $a = 1$	
$b = 1$ e $a = 2$	
$b = 0$ e a qualquer número real	
nenhuma, M é sempre diagonalizável	x
todas as afirmações anteriores são falsas	
não sei	

5) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que a matriz $[T]_\epsilon$ de T na base canônica é simétrica. Sabendo que

- $T(1,1,1) = (2,2,2)$,
- todo vetor não nulo do plano $x+y+z=0$ é um autovetor,
- o determinante de $[T]_\epsilon$ é 18, e
- o traço de $[T]_\epsilon$ é negativo.

Determine os autovalores de T com suas multiplicidades.

Resposta:

autovalores 2 e -3, 2 simples e -3 duplo ou de multiplicidade dois.

6) Considere a transformação linear T cuja matriz $[T]$ na base canônica é o produto das matrizes

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

A transformação linear T é:

(b) A projeção ortogonal no plano $x+y=0$ seguida do espelhamento no plano $x-y-2z=0$.

a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**	**l**	**m**	**n**	**N**
	x													