P4 de Álgebra Linear I – 2012.1

?? de junho de 2012.

Gabarito

1) Dado um plano π de $\mathbb{R}^3$ que contém a origem, o espelhamento E no plano π é a transformação linear que verifica

- $E(\bar{v}) = \bar{v}$ se $\bar{v}$ é paralelo a plano π e
- $E(\bar{n}) = -\bar{n}$ se $\bar{n}$ é ortogonal a π.

Considere agora o espelhamento $E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em um plano tal que a matriz $[E]$ de E na base canônica, é o seguinte produto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

a) Determine o valor de x.

b) Determine a equação cartesiana do plano do espelhamento.

c) Apresente, se possível, explicitamente a matriz de E^{-1} na base canônica.

d) Determine, se possível, uma base α do $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de E na base α, denotada por $[E]_\alpha$, seja

$$[E]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Considere uma matriz M que é diagonalizável e tem determinante 4. Sabemos que ela se escreve como produto das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Determine os valores de a e b.

Resposta:

a) Considere uma base de $\mathbb{R}^3$ formada pelo vetor normal do plano de espelhamento $\overrightarrow{n}$ e dois vetores paralelos ao plano de espelhamento $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$,

$$\gamma = \{\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}.$$

Temos

$$E(\overrightarrow{n}) = -\overrightarrow{n}, \quad E(\overrightarrow{v}_1) = \overrightarrow{v}_1, \quad E(\overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{v}_2.$$

Portanto,

$$[E]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como as matrizes

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são semelhantes elas têm o mesmo traço. Portanto $x = -1$.

b) O plano de espelhamento é gerado pelos vetores correspondentes ao autovaloror 1, isto é,

$$(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}), \quad (1/\sqrt{2}, 0, /\sqrt{2}).$$

Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

é ortogonal o vetor $(1, 2, -1)$ é perpendicular a estes dois vetores, portante ele é um vetor normal do plano de espelhamento. Assim a equação cartesiana do plano de espelhamento é

$$x + 2\,y - z = 0$$

c) Por construção $E^2 = Id$ (basta ver isto numa base). Vemos esta propriedade na base γ escolhida acima):

$$\begin{aligned} E^2(\overrightarrow{n}) &= -E(\overrightarrow{n}) = -(-\overrightarrow{n}) = \overrightarrow{n}, \\ E^2(\overrightarrow{v}_1) &= E(\overrightarrow{v}_1) = \overrightarrow{v}_1, \\ E^2(\overrightarrow{v}_2) &= E(\overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{v}_2. \end{aligned}$$

Logo $E^{-1} = E$. Calculamos explicitamente esta matriz:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & +1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/6+1/2+1/3 & -2/6-1/3 & +1/6+1/2-1/3 \\ -2/6-1/3 & -4/61/3 & 2/6+1/3 \\ 1/6+1/2-1/3 & -1/6+1/2+1/3 & -1/6+1/2+1/3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4/6 & -4/6 & 2/6 \\ -4/6 & -2/6 & 4/6 \\ 2/6 & 4/6 & 4/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

d) Seja $\alpha = \{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_3\}$ uma base tal que

$$[E]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$E(\overrightarrow{w}_1) = \overrightarrow{w}_1, \quad E(\overrightarrow{w}_3) = \overrightarrow{w}_3, \quad E(\overrightarrow{w}_2) = -\overrightarrow{w}_2 - 2\overrightarrow{w}_3.$$

Isto siginifica que $\overrightarrow{w}_1$ e $\overrightarrow{w}_3$ são dois vetores linearmente independentes do plano de espelhamento, por exemplo

$$\overrightarrow{w}_1 = (1, -1, -1), \quad \overrightarrow{w}_3 = (1, 0, 1).$$

Seja $w_2 = (x, y, z)$. Então

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema linear

$$5\,x-2\,y+3\,z=-6,\quad -2\,x+2\,y+2\,z=0,\quad x+2\,y+5\,z=-6.$$

Isto é,

$$x-y-z=0,\quad 5\,x-2\,y+3\,z=-6,\quad x+2\,y+5\,z=-6.$$

Escalonando,

$$x-y-z=0,\quad 3\,y+8\,z=-6,\quad 3\,y+6\,z=-6.$$

Portanto $z=0$, $y=-2$, $x=-2$. Portanto, $\overrightarrow{w}_2=(-2,-2,0)$.

Logo

$$\alpha=\{\overrightarrow{w}_1=(1,-1,-1),\overrightarrow{w}_2=(-2,-2,0),\overrightarrow{w}_3=(1,0,1)\}.$$

Observe que existem outras possibilidades para a base α dependendo da escolha de $\overrightarrow{w}_1$ e $\overrightarrow{w}_3$.

e) Seja $[M]$ a matriz de M na base canônica. Esta matriz tem determinante 4. Como $[M]$ é semelhante a

$$[B]=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix}$$

o determinante de $[B]$ é 4. Logo

$$a\,(2)\,(2)=4,\qquad a=1.$$

Como a matriz $[B]$ é semelhante a $[M]$ que é diagonalizável, $[B]$ também é diagonalizável. Portanto, devem existir dois autovalores linearmente independentes associados ao autovalor 2. Para calcular estes autovalores resolvemos o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & b & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$-x = 0, \quad b\,y = 0.$$

As soluções devem formar um plano, logo $b = 0$. Portanto,

$$[B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

2) Considere as matrizes A e B a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine todos os autovalores de A.

b) Decida se A é diagonalizável. Em caso afirmativo determine todas as formas diagonais de A.

c) Decida se as matrizes A e B são semelhantes.

d) Apresente a matriz A^{-1}.

Resposta:

a) A matriz é triangular, portanto seus autovalores são os termos da diagonal: 1 (duplo) e -1.

b) Para que a matriz seja diagonalizável devemos encontrar dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor

1. Devemos resolver

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos,

$$x - 2\,y = 0, \quad y = 0.$$

Logo os autovalores associados a 1 são da forma

$$(0, 0, t),\ t \neq 0$$

Portanto, não existem dois autovetores linearmente independentes associados a 1 e a matriz não é diagonalizável.

c) Se B for semelhante a A então, como A não é diagonalizável, B não pode ser diagonalizável. Vejamos se existe uma base de autovetores de B. Os autovetores associados a 1 verificam

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos $x-2\,y = 0$. Obtemos assim dois autovetores l.i. associados a 1, por exemplo $(0,0,1)$ e $(2,1,0)$. Um autovetor associado a -1 é $(0,1,0)$. Portanto, B possui uma base de autovetores e é diagonalizável. Como A não é diagonalizável as matrizes não podem ser semelhantes.

d) Usaremos o método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

segunda linha menos a primeira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

terceira linha mais a segunda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

troca de sinal da segunda linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

3) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$\overrightarrow{u}_1 = (1,1,1), \quad \overrightarrow{u}_2 = (1,1,0), \quad \overrightarrow{u}_3 = (3,3,2), \quad \overrightarrow{u}_4 = (2,2,2)$

e o subespaço vetorial $\mathbb{V}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$ e $\overrightarrow{u}_4$.

a) Determine uma base β do subespaço $\mathbb{V}$ formada por vetores do conjunto $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4\}$.

b) Determine uma base ortogonal β' de $\mathbb{V}$ e uma base ortogonal β'' de $\mathbb{R}^3$ que contenha a base β'. Lembre que uma base ortogonal é uma base formada por vetores mutuamente ortogonais.

c) Determine as coordenadas do vetor $(5,5,3)$ de $\mathbb{V}$ na base β.

Resposta:

a) Como os vetores $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_2$ não são paralelos (proporcionais) eles são linearmente independentes.

O vetor $\overrightarrow{u}_3$ é combinação linear de $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_2$. Isto pode ser verificado de duas formas. Veja que o determinante com linhas as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ e $\overrightarrow{u}_3$ é nulo. Ou escreva

$$\overrightarrow{u}_3 = x\,\overrightarrow{u}_1 + y\,\overrightarrow{u}_2.$$

Temos

$$3 = x + y, \quad 3 = x + y, \quad 2 = x.$$

Logo a solução é $\overrightarrow{u}_3 = 2\,\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$.

Obviamente o vetor $\overrightarrow{u}_4$ é combinação linear de $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_2$ ($\overrightarrow{u}_4 = 2\,\overrightarrow{u}_1 + 0\,\overrightarrow{u}_2$).

Portanto, uma base de $\mathbb{V}$ é $\beta = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$.

b) Para determinar β' determinamos a equação cartesiana de $\mathbb{V}$. Como $\mathbb{V}$ é um plano e seu vetor normal é

$$\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2 = (-1,1,0)$$

e a equação cartesiana de $\mathbb{V}$ é

$$x - y = 0.$$

Por exemplo, $\{(0,0,1),(1,1,0)\}$ formam uma base ortogonal de $\mathbb{V}$.

A base β'' já esta determinada (é suficiente acrescentar o vetor normal do plano à base β',

$$\beta'' = \{(0,0,1),(1,1,0),(1,-1,0)\}.$$

c) Escrevemos,

$$(5,5,3) = x\,\overrightarrow{u}_1 + y\,\overrightarrow{u}_2.$$

Temos

$$5 = x + y, \quad 5 = x + y, \quad 3 = x.$$

Logo $x = 3$ e $y = 2$, isto é,

$$(5,5,3) = 3\,(1,1,1) + 2(1,1,0).$$

Portanto

$$(5,5,3)_\beta = (3,2).$$