G4 de Álgebra Linear I – 2011.2
Gabarito

Questão 1) Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine uma base ortonormal β de autovetores de A.

b) Determine a matriz de A na base β escolhida no item (a).

c) Determine a matriz de A^5 na base β escolhida no item (a).

d) Determine uma base γ da imagem de A tal que todo vetor da base γ seja unitário.

Resposta: Começaremos calculando os autovalores de A. Como o determinante de $[A]$ é nulo (todas as linhas são iguais) 0 é um autovetor de A (o determinante é o produto dos autovalores contados com multipicidades). Observe que os autovetores associados a 0 verificam

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 1 & 1 \\ 1 & 1-0 & 1 \\ 1 & 1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$x + y + z = 0.$$

Portanto, existem dois autovetores linearmente independentes associados a 0. Logo a multiplicidade do autovalor 0 é 2 ou 3. Observe que se a multiplicidade fosse 3 teriamos que o traço de A seria

$$0 + 0 + 0 = 0 \neq 3.$$

Logo a multiplicidade de 0 é 2. Assim obtemos que o terceiro autovalor λ de A é

$$0+0+\lambda=3, \qquad \lambda=3.$$

Observe que v. poderia ter usado o polinômio característico.

a) Como a matriz é simétrica o vetor $(1,1,1)$ normal do plano $x+y+z=0$ é um autovetor de A (necessariamente associado a 3). Os vetores do plano $x+y+z=0$ são autovetores de A. Temos assim que $(1,1,1)$ e $(1,0,-1)$ são autovetores de A. Portanto,

$$(1,0,-1)\times(1,1,1)=\left\|\begin{matrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=(1,-2,1)$$

é outro autovetor (associado a 0). Logo

$$\{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}$$

é uma base ortogonal formada por autovetores de A. Para obter uma base ortonormal é suficiente normalizar ("dividindo" os vetores pelos módulos $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{6}$, respectivamente), obtendo a base

$$\beta=\left\{\bar{u}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,1), \bar{u}_2\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,-1), \bar{u}_3\frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,-2,1)\right\}.$$

b) Temos

$$A(\bar{u}_1)=3\,\bar{u}_1, \qquad A(\bar{u}_2)=0\,\bar{u}_2, \qquad A(\bar{u}_3)=0\,\bar{u}_3.$$

Logo

$$[A]_\beta=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

c)

$$([A]_\beta)^5=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}3^5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}243 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

d) A imagem de A é gerada pelos vetores $A(\mathbf{i})$, $A(\mathbf{j})$ e $A(\mathbf{k})$. Temos

$$A(\mathbf{i}) = A(\mathbf{j}) = A(\mathbf{k}) = (1,1,1).$$

Logo uma base da imagem é $\{(1,1,1)\}$. Agora é suficiente normalizar para obter a base γ,

$$\gamma = \left\{ \bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,1) \right\}.$$

Questão 2)

a) Considere uma transformação linear $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que

- não possui inversa,
- não é diagonalizável e
- a matriz de A na base canônica é

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Sabendo que $(1,1)$ é um autovetor determine a, b e c.

b) Considere uma transformação linear $B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $[B]$ na base canônica é simétrica e tem traço 3. Sabemos que

$$B(1,0,-1) = 2\,(1,0,-1)$$

e que a imagem de B é o plano

$$\text{imagem}(B) = \{\bar{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x+y+z = 0\}.$$

Determine uma base ortonormal β formada por autovetores de B.

Nota: as coordenadas dos vetores estão escritas na base canônica.

Resposta:

a) Como a matriz não possui inversa 0 deve ser um autovalor. Como não é diagonalizável 0 deve ter multiplicade dois (caso contrário a matriz teria dois autovalores diferentes e seria diagonalizável). Portanto o traço de A é

$$0+0=1+c, \quad c=-1.$$

Finalmente $(1,1)$ é um autovalor (associado a 0), portanto

$$[A]=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a\\ b-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad a=-1, \quad b=1.$$

Logo

$$[A]=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

b) Como a imagem é um plano 0 deve ser um autovalor. O autovalor associado a 0 é o vetor normal do plano $x+y+z=0$, o vetor $(1,1,1)$. Como a matriz é simétrica, o autovetor $\overrightarrow{v}$ associado a 1 (note que como o traço é 3 temos que a soma dos autovalores deve ser 3, logo $2+0+\lambda=3$ e $\lambda=1$) deve ser perpendicular aos autovetores $(1,1,1)$ associado a 0 e $(1,0,-1)$ associado a 2. Assim deve ser paralelo a

$$(1,0,-1)\times(1,1,1)=\begin{Vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}=(1,-2,1).$$

Exatamente como na primeira questão da prova obtemos uma base ortonormal formada por autovetores,

$$\beta=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}.$$

Questão 3) Considere o sub-espaço vetorial $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{W}=\{v=(x,y,z)\colon x-y+2\,z=0\}$$

e as bases ortonormais γ de $\mathbb{W}$ e η de $\mathbb{R}^3$

$$\gamma = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right) \right\}$$

e

$$\eta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

a) Determine as coordenadas do vetor $\bar{v} = (-1, 3, 2) \in \mathbb{W}$ na base γ.

b) Determine uma base ortonormal α de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vetores da base γ.

c) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base η é

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine a diagonal da matriz de T na base canônica.

Nota: as coordenadas dos vetores estão escritas na base canônica.

Resposta:

a) Escrevemos

$$(-1, 3, 2) = x \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) + y \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right).$$

temos

$$\begin{aligned} (-1, 3, 2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) &= x \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) \\ &\quad + y \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right), \end{aligned}$$

logo

$$\frac{-4}{\sqrt{5}} = x.$$

Analogamente,

$$(-1,3,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)=x\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$
$$+\,y\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right),$$

logo

$$\frac{18}{\sqrt{30}}=y.$$

Logo as coordenadas na base γ de $(-1,3,2)$ são

$$(-1,3,2)_\gamma=\left(\frac{-4}{\sqrt{5}},\frac{18}{\sqrt{30}}\right).$$

b) O terceiro vetor da base α é

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}}\end{vmatrix}=$$
$$=\left(\frac{5}{\sqrt{150}},\frac{-5}{\sqrt{150}},\frac{10}{\sqrt{150}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Logo

$$\alpha=\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

c) A matriz $[T]$ de T na base canônica é obtida como o produto

$$[T]=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{18}} & \star & \star\\ \star & \frac{1}{\sqrt{18}} & \star\\ \star & \star & \frac{-2}{\sqrt{18}}\end{pmatrix},$$

onde $\star$ representa números que não são necessários de calcular (estamos interessados na diagonal). Observe que o traço da matriz final é zero, compatível com os dados do problema ($[T]_\eta$ tem traço zero).

Questão 4) Considere o sistema linear de equações

$$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+2\,y+3\,z&=1,\\ x+3\,y+a\,z&=b. \end{aligned}$$

a) Encontre os valores de a e b para que o sistema tenha solução única.

b) Encontre os valores de a e b para que o sistema tenha infinitas soluções.

c) Encontre os valores de a e b para que o sistema não tenha solução.

Resposta: Escalonando o sistema obtemos

$$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ y+2\,z&=0,\\ 2\,y+(a-1)\,z&=b-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ y+2\,z&=1,\\ (a-5)\,z&=b-1, \end{aligned}$$

a) $a \neq 5$ e $b \in \mathbb{R}$.

b) $a = 5$ e $b = 1$.

c) $a = 5$ e $b \neq 1$.