P4 de Álgebra Linear I – 2010.1

30 de junho de 2010.

Gabarito

Questão 1)

(a) Como a matriz é triangular, é imediato que o polinômio característico é $P(\lambda) = (2-\lambda)(3+\lambda)^2$, donde os autovalores são 1 (simples) e -3 (duplo).

Achando os autovetores:

Para $\lambda = 2$ temos de resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

resultando nos autovetores $t(1,0,0),\ t \neq 0$.

Para $\lambda = -3$ temos de resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

resultando nos autovetores $t(0,1,0),\ t \neq 0$.

(b) Não, pois existem no máximo dois autovetores linearmente independentes, e.g., $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

(c) Sejam $\overrightarrow{u} = (1,0,0)$ e $\overrightarrow{v} = (0,1,0)$. Temos $T(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ e $T(\overrightarrow{v}) = -3\overrightarrow{v}$. Queremos saber se existe um vetor $\overrightarrow{w} = (a,b,c)$, tal que $\gamma = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é uma base com $T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}$. Isso corresponde ao sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a \\ -3b+1 \\ -3c \end{bmatrix},$$

cuja solução é $(-1/5, b, 1),\ b \in \mathbb{R}$. Como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ geram o plano xOy e todos o vetores acima não estão neste plano, qualquer q seja b, então a resposta do problema é afirmativa e uma base possível é $\gamma = \{(1,0,0),(0,1,0),(-1/5,0,1)\}$.

Questão 2)

Solução

(a) O vetor $\overrightarrow{u} = (1,1,-2)$, normal ao plano π ,é vetor diretor da reta r; como $P \in \pi$, temos:

$$r: \quad X(t) = (1,0,1) + t(1,1,-2) = (1+t, t, 1-2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Q é a interseção da reta r com o plano π. Basta então achar o valor de t tal que $X(t)$ satisfaça a eq. de π. Temos:

$$1 = (1+t) + t - 2(1-2t) = 6t - 1 \Longrightarrow t = 1/3.$$

Logo $Q = X(1/3) = (4/3, 1/3, 1/3)$. Então a distância procurada é

$$d = |||\overrightarrow{QP}|| = ||(-1/3, -1/3, 2/3)|| = \sqrt{6}/3.$$

(c) Um vetor normal ao plano ρ é dado por $(1,1,-2) \times (2,0,1) = (1,-5,-2)$. Logo a eq. cartesiana de ρ é da forma $x - 5y - 2z = c$. Para achar c, basta notar que, por exemplo, $P \in \rho$, donde $c = 1 + 5.0 - 2 = -1$. Finalmente,

$$\rho: \ x - 5y - 2z = -1.$$

(d) A área dp triângulo PQR é dada por

$$A = \frac{1}{2}|||\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP}|||,$$

onde $R(t) = Q + t(2,0,1)$. Assim, como $\overrightarrow{QR} = t(2,0,1)$ e $\overrightarrow{QP} = (-1/3, -1/3, 2/3)$, temos:

$$\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP} = \frac{t}{3}(1,-5,-2) \Rightarrow \frac{1}{2}|||\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP}||| = \frac{\sqrt{30}}{6}|t|.$$

Como queremos $A = \sqrt{30}/6$, que $|t| = 1 \Rightarrow t = \pm 1$. Assim, os pontos procurados são

$$(10/3, 1/3, 4/3) \ \text{ e } \ (-2/3, 1/3, -2/3).$$

Questão 3)

Solução

a) VERDADEIRA: Como $(2,1,2) = (1,1,1)+(1,0,1)$ e $(0,1,0) = (1,1,1)-(1,0,1)$, segue que o subespaço em pauta é gerado apenas pelos vetores $(1,1,1)$ e $(1,0,1)$, que são L.I., portanto trata-se de um plano pela origem com estes vetores como diretores.

b) VERDADEIRA: Sabemos que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ é L.I. pois são autovetores associados a autovalores distintos. Suponha que $aT(\overrightarrow{v_1}) + bT(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0}$. Então $a\lambda_1\overrightarrow{v_1} + b\lambda_2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$, donde $a\lambda_1 = b\lambda_2 = 0$ o que implica que $a = b = 0$, uma vez que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Logo $\{T(\overrightarrow{v_1}), T(\overrightarrow{v_2})\}$ é L.I.

c) VERDADEIRA: Basta fazer o produto misto do vetor diretor de r_1, $(1,1,0)$, com o vetor diretor de r_2, $(-1,2,-1)$ e o vetor $\overrightarrow{PQ} = (1,2,3) - (1,1,5) = (0,1,-3)$. Temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

logo o produto misto é $= 5$, logo, não-nulo; consequentemente as retas são reversas.