P4 de Álgebra Linear I – 2009.2

Gabarito

Questão 1)

Consider o plano π de equação cartesiana $x + 2y + z = 1$. Ache a equação cartesiana do plano ρ, perpendicular a π e contendo os pontos $(2, 0, -1)$ e $(1, 1/2, -1)$.

Resposta: Um vetor normal ao plano π é $(1, 2, 1)$. Notando q/ os pontos dados pertencem ao plano π (satisfazem a sua equação), segue que ρ deve conter a reta ligando estes dois pontos e que tem vetor diretor $(1, -1/2, 0)$. Assim um vetor normal a ρ é dado por

$$(1, 2, 1) \times (1, -1/2, 0) = (1/2, , 1, -5/2),$$

ou ainda $(1, 2, -5)$. Logo a eq. de ρ é da forma $x + 2y - 5z = d$ e para achar d basta substituir, e.g., o pto. $(2, 0, -1)$, dando:

$$d = 2 + 5 = 7$$

Finalmente, $\rho : x + 2y - 5z = 7$.

Questão 2)

Determine a matriz na base canônica da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que tem autovalores -2 e 3, associados aos autovetores $(3, 1)$ e $(-2, 1)$, respectivamente.

Resolução:

Seja $\mathcal{B} = \{(3, 1), (-2, 1)\}$. Então

$$[T]_{\text{can}} = P\,[T]_{\mathcal{B}}\,P^{-1},$$

onde

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, e$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para canônica, cuja inversa é:

$$P^{-1} = (1/5) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$[T]\text{can} = (1/5) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questão 3)

Decida se as afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras.

(a) Se $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$ para todo $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

(b) Se $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é conjunto L.I., então $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}\}$ também é L.I.

(c) Para toda transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, o conjunto $\mathbb{V} = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}\}$ é subespaço vetorial.

Resolução:

(a) Se $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$, para *todo* $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, então $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$, para todo $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, logo $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ teria de ser paralelo a *todo* vetor de $\mathbb{R}^3$, o que só é possível se $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$. Afirmativa portanto é **verdadeira**.

(b) Suponha que $\alpha(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\beta(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})+\gamma(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$. Então:

$$(\alpha+\gamma)\overrightarrow{u}+(\alpha+\beta)\overrightarrow{v}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0},$$

donde segue, por independência linear que:

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases}$$

cuja única solução é $(0,0,0)$. Logo, a afirmativa é **verdadeira**.

(c) Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ elementos de $\mathbb{V}$. Então, $T(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=T(\overrightarrow{u})+T(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$. Ou seja, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\in\mathbb{V}$. Também temos: $T(\lambda\overrightarrow{u})=\lambda T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$, ou seja, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, temos $\lambda\overrightarrow{u}\in\mathbb{V}$.

Logo, afirmativa **verdadeira**.

Questão 4)

Considere a transformação linear S cuja matriz na base canônica é

$$\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Sabendo que $\lambda_1=4$ é um autovalor de S:

(a) Ache os outros autovalores λ_2 e λ_3.

(b) S é diagonalizável? Explique.

(b) Ache, se possível, uma base $\mathcal{B}$ na qual a matriz de S é

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Resolução:

(a) Chamando de $M=[S]_{\text{can}}$, temos que

$$\text{traço}(M)=6=4+\lambda_2+\lambda_3.$$

Também temos

$$\det(M) = -32 = 4\lambda_2\lambda_3.$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2\lambda_3 = -8, \end{cases}$$

de onde tiramos

$$\lambda_2 - \frac{8}{\lambda_2} = 2 \Rightarrow \lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 8 = 0.$$

As raízes desta eq. do 2o. grau são -2 e 4. Como λ_2, λ_3 aparecem simétricamente na eq. acima, podemos tomar $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ (autovalor duplo) e $\lambda_3 = -2$.

(b) Calculemos os autovetores de M. Temos, para $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, o sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0, \end{cases}$$

logo $x = -y$ e $x = z$, e os autovetores são da forma $(t, -t, t) = t(1, -1, 1)$, para $t \neq 0$. Ou seja, podemos obter apenas um autovetor independente. Como o outro autovalor é simples, também só conseguiremos extrair um outro autovetor adicional, independente do 1o. Logo, não existe base de autovetores e a transformação não é diagonalizável.

Como precisaremos dos autovetores associados a -2, vamos calculá-los tb.:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja:

$$\begin{cases} 7x + 4y + 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0, \end{cases}$$

logo $x = -y$ e $y = z$, e os autovetores são da forma $t(-1, 1, 1)$, c/ $t \neq 0$.
(c) Buscamos uma base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$, tal que

$$\begin{cases} S(\overrightarrow{u}) = -2\overrightarrow{u} \\ S(\overrightarrow{v}) = 3\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} \\ S(\overrightarrow{w}) = 4\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} + 4\overrightarrow{w}. \end{cases}$$

Assim, escolhemos $\overrightarrow{u} = (-1, 1, 1)$, autovetor associado ao autovalor -2. Com isso achamos $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$, resolvendo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \quad \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix},$$

ou seja, o sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -3 \\ x - 2y - 3z = 3, \end{cases}$$

que tem soluções $(t, -t, t - 1)$, c/ $t \in \mathbb{R}$. Assim, podemos escolher $\overrightarrow{v} = (0, 0, -1)$.

Finalmente achamos $\overrightarrow{w} = (x, y, z)$ resolvendo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \quad \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix},$$

ou seja:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -4 \\ x - 2y - 3z = 2, \end{cases}$$

que tem soluções $(t, -t - 1, t)$, com $t \in \mathbb{R}$, e podemos tomar $\overrightarrow{w} = (0, -1, 0)$.

Portanto uma base procurada é $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 1), (0, 0, -1), (0, -1, 0)\}$.
