P4 de Álgebra Linear I – 2009.1

27 de Junho de 2009.

Gabarito.

---

1) Considere o plano π de $\mathbb{R}^3$ cuja equação cartesiana é

$$\pi\colon x + y - z = 1.$$

(1.a) Determine três pontos A, B e C do plano π que não sejam colineares (isto é, não existe uma reta contendo estes três pontos).

(1.b) Determine as equações cartesianas de **todos** os planos ρ cuja distância a π seja 2.

(1.c) Considere a reta r de equação paramétrica

$$r\colon (1+t, 1+t, 1+2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine a equação paramétrica da reta s contida no plano π que é perpendicular a r e contém o ponto $(1,0,0)$.

Resposta:

(1.a) Escolhemos, por exemplo, os pontos $A = (1,0,0)$ e $B(0,1,0)$ do plano π. Estes pontos determinam o vetor $\overrightarrow{BA} = (1,-1,0)$. O terceiro ponto C deve verificar que $\overrightarrow{CA}$ não seja parelelo a $\overrightarrow{BA} = (1,-1,0)$. Por exemplo, se escolhemos $C = (0,0,-1) \in \pi$ temos $\overrightarrow{CA} = (1,0,1)$ que não é paralelo a $\overrightarrow{BA} = (1,-1,0)$. Se fazemos

$$\overrightarrow{CA} = (1,0,1) = \lambda\,\overrightarrow{BA} = (1,-1,0),$$

temos $\lambda = 1$ na primeira equação e $\lambda = 0$ na segunda, o que é incmpatível.

(1.b) Os planos ρ devem ser paralelos a π (pois caso contrário a distância entre os planos seria zero). Portanto, as equações cartesianas destes planos são da forma:

$$\rho\colon x + y - z = e.$$

Devemos determinar e. Observe que o ponto $E = (e, 0, 0)$ pertence ao plano ρ e que a distância de E ao plano π é a distância entre os planos π e ρ.

Para determinar a distância d entre E e π escolhemos qualquer ponto de π, por exemplo $A = (1, 0, 0)$ e consideramos o vetor normal $\overrightarrow{n} = (1, 1, -1)$ do plano π. Então, se ϕ é o ângulo entre $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{n}$ temos

$$d = |\overrightarrow{EA}|\,|\cos\phi|.$$

Portanto,

$$d = \frac{|\overrightarrow{EA}|\,|\overrightarrow{n}|\,|\cos\phi|}{|\overrightarrow{n}|} = \left|\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{n}}{\sqrt{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}}}\right| = \left|\frac{|(1-e, 0, 0)\cdot(1, 1, -1)|}{\sqrt{(1, 1, -1)\cdot(1, 1, -1)}}\right| = \frac{|1-e|}{\sqrt{3}}$$

Queremos que

$$d = \frac{|1-e|}{\sqrt{3}} = 2.$$

Portanto,

$$(1-e) = \pm 2\sqrt{3}, \qquad e = 1 + 2\sqrt{3}, \quad e = 1 - 2\sqrt{3}.$$

Assim, temos dois planos,

$$\rho_1\colon x + y - z = 1 + 2\sqrt{3}, \qquad \rho_2\colon x + y - z = 1 - 2\sqrt{3}.$$

(1.c) O vetor diretor $\overrightarrow{w}$ da reta s dever ser perpendicular ao vetor diretor da reta r, $(1, 1, 2)$. Como a reta s está contida no plano π, o vetor $\overrightarrow{w}$ deve ser perpendicular ao vetor normal $\overrightarrow{n} = (1, 1, -1)$ do plano π. Portanto, $\overrightarrow{w}$ é paralelos a $(1, 1, 2) \times (1, 1, -1)$. Isto é, o vetor $\overrightarrow{w}$ é paralelo a

$$(1, 1, -1) \times (1, 1, 2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -3, 0).$$

Escolhemos $\overrightarrow{w} = (1, -1, 0)$. Assim, como $(1, 0, 0)$ pertence a reta s, umas equações paramétricas de s são:

$$s\colon (1 + t, -t, 0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Claramente, esta reta está contida no plano:

$$(1+t)+(-t)+0=1.$$

---

2) Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$\beta=\{\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_3\} \quad \text{e} \quad \gamma=\{\overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_3,\overrightarrow{u}_2+\overrightarrow{u}_3\}.$$

(2.a) Considere o vetor $\overrightarrow{w}$ cujas coordenadas na base β são

$$(\overrightarrow{w})_\beta=(1,2,3).$$

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{w})_\gamma$ do vetor $\overrightarrow{w}$ na base γ.

(2.b) Considere os vetores

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{v}_1=(2,-1,0), & \overrightarrow{v}_2=(2,0,1), & \overrightarrow{v}_3=(0,1,1), \\ \overrightarrow{v}_4=(4,-2,0), & \overrightarrow{v}_5=(2,2,3), & \overrightarrow{v}_6=(1,1,\mathbf{a}). \end{array}$$

Determine o valor da coordenada **a** no vetor $\overrightarrow{v}_6$ para que os vetores $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$, $\overrightarrow{v}_4$, $\overrightarrow{v}_5$ e $\overrightarrow{v}_6$ gerem um plano π.

(2.c) Determine uma base do plano π e as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}_5$ nessa base.

Resposta:

(2.a) Sejam (a,b,c) as coordenadas do vetor $\overrightarrow{w}$ na base γ, isto é,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w} &= a\,(\overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_2)+b\,(\overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_3)+c\,(\overrightarrow{u}_2+\overrightarrow{u}_3)= \\ &=(a+b)\,\overrightarrow{u}_1+(a+c)\,\overrightarrow{u}_2+(b+c)\,\overrightarrow{u}_3. \end{aligned}$$

Por outra parte, como as coordenadas de $\overrightarrow{w}$ na base β são $(1,2,3)$, temos

$$\overrightarrow{w}=(1)\,\overrightarrow{u}_1+(2)\,\overrightarrow{u}_2+(3)\,\overrightarrow{u}_3.$$

Portanto, pela unicidade de coordenadas em uma base, temos que

$$1 = a + b, \qquad 2 = a + c, \qquad 3 = b + c.$$

Logo,

$$1 = c - b, \qquad 3 = c + b,$$

portanto,

$$2\,c = 4, \qquad c = 2, \qquad b = 1, \qquad a = 0.$$

Logo,

$$(w)_\gamma = (0, 1, 2).$$

(2.b) Os vetores $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ são linearmente independentes. Portanto, geram um plano π cujo vetor normal $\overrightarrow{n}$ é seu produto vetorial:

$$\overrightarrow{n} = (2, -1, 0) \times (2, 0, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 2).$$

Portanto,

$$\pi\colon x + 2\,y - 2\,z = 0.$$

Veja que os vetores $\overrightarrow{v}_3$, $\overrightarrow{v}_4$ e $\overrightarrow{v}_5$ verificam a equação do plano π. Portanto, $\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_5$ tambeém geram o plano π. Finalmente, devemos escolher a de forma que $\overrightarrow{v}_6$ pertence ao plano π (caso contrário os vetores $\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_6$ gerariam todo o espaço $\mathbb{R}^3$):

$$1 + 2 - 2\,a = 0, \quad a = 3/2.$$

(2.c) Uma base do plano

$$\pi\colon x + 2\,y - 2\,z = 0$$

está formada por dois vetores não paralelos do plano. Para evitar contas, podemos escolher $\eta = \{\overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_1\}$ (ou qualquer vetor $\overrightarrow{v}$ do plano π que não seja paralelo a $\overrightarrow{v}_5$). Como

$$\overrightarrow{v}_5 = (1)\,\overrightarrow{v}_5 + (0)\,\overrightarrow{v}_1,$$

temos

$$(\overrightarrow{v}_5)_\eta = (1, 0).$$

Obviamente, v. poderia ter escolhido uma base do plano menos conveniente, por exemplo

$$\eta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}.$$

Nesse caso

$$(\overrightarrow{v}_5)_\eta = (x, y)$$

onde

$$(2,2,3) = x\,(2,-1,0) + y\,(2,0,1), \qquad 2 = 2\,x + 2\,y, \quad 2 = -x, \quad 3 = y$$

Logo, neste caso, Nesse caso

$$(\overrightarrow{v}_5)_\eta = (-2, 3).$$

Outro exemplo, se v. considera a base

$$\alpha = \{\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}.$$

Nesse caso

$$(\overrightarrow{v}_5)_\alpha = (1, 2)$$

---

3) Considere o vetor $\overrightarrow{w} = (1,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear

$$M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad M(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}.$$

(3.a) Determine a matriz $[M]_\mathcal{E}$ de M na base canônica.

(3.b) Determine o subespaço imagem de M, isto é,

$$\text{im }(M) = \{\overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } M(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{n}\}.$$

(3.c) Considere agora um vetor $\overrightarrow{m}$ de $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad L(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{m}.$$

Sabendo que a matriz de L na base canônica é

$$[L]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

determine o vetor $\overrightarrow{m}$.

Resposta:

(3.a) Temos,

$$\begin{aligned} M(x,y,z) &= (x,y,z)\times(1,2,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (y-2\,z, -x+z, 2\,x-y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$M(\mathbf{i}) = (0,-1,2), \quad M(\mathbf{j}) = (1,0,-1), \quad M(\mathbf{k}) = (-2,1,0).$$

Logo a matriz de M na base canônica é

$$[M]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3.b) O subespaço im (M) é gerado pelos vetores $M(\mathbf{i})$, $M(\mathbf{j})$ e $M(\mathbf{k})$. Todos estes vetores são (por definição de M) ortogonais ao vetor $(1,2,1)$. Portanto, como $M(\mathbf{i})$ e $M(\mathbf{j})$ são l.i., estes vetores geram um plano, no caso o plano π de vetor normal $(1,2,1)$. Como $M(\mathbf{k})$ pertence a dito plano, temos

$$\text{im } (M) = \pi\colon x + 2\,y + z = 0.$$

(3.c) Por definição de L, o vetor $\overrightarrow{m}$ deve ser perpenicular aos vetores $(0,\pm 1,0)$ e $(1,0,-1)$. Portanto, deve ser paralelo a

$$(0,1,0)\times(1,0,-1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,0,-1).$$

Logo

$$\overrightarrow{m} = (x,0,x),$$

para certo x. Para determinar x, usamos a equação

$$(1,0,0)\times(x,0,x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} = (0,-x,0) = (0,-1,0).$$

Logo $x = 1$. Veja que esta escolha é compatível com as condições

$L(\mathbf{j}) = (0,1,0)\times(1,0,1) = (1,0,-1), \qquad L(\mathbf{k}) = (0,0,1)\times(1,0,1) = (0,1,0).$

Obviamente, v. poderia ter raciocinado como segue. Escrevemos $\overrightarrow{m} = (x,y,z)$ e resolvemos os sistema cujas equações são

$$(1,0,0)\times(x,y,z) = (0,-z,y) = (0,-1,0),$$

$$(0,1,0)\times(x,y,z) = (z,0,-x) = (1,0,-1),$$

$$(0,0,1)\times(x,y,z) = (-y,x,0) = (0,1,0).$$

---

4)

Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4.a) Determine os autovalores de T e suas multiplicidades.

(4.b) Ache, se possível, uma forma diagonal de T.

Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(0,-1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}.$$

(4.c) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base β.

(4.d) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(4.a) O polinômio característico p_T de T é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9.$$

Portanto, os autovalores são 1 (simples) e 3 (multiplicidade 2).

(4.b) Os autovetores associados a 1 são as soluções não nulas do sistema

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é, $y = 0 = z$. Logo os autovetores associados a 1 são da forma $(t, 0, 0)$, $t \neq 0$.

Analogamente, os autovetores associados a 3 são as soluções não nulas do sistema

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é, $z = 0$, $x = 0$. Logo os autovetores associados a 3 são da forma $(0, t, 0)$, $t \neq 0$.

Observe que não existem dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor 3 de multiplicidade 2. Portanto, não existe uma base de autovetores de T é não existe uma forma diagonal.

(4.c) Observe que a matriz de mudança de base da base β à base canônica é:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz de mudança de base da base canônica à base β é

$$P = M^{-1}.$$

Usaremos o método de escalonamento para calcular a matriz inversa de M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4.d) Seja

$$\gamma = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}.$$

Observe que pela definição de $[T]_\gamma$,

$$T(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}, \quad T(\overrightarrow{v}) = 3\,\overrightarrow{v}, \quad , T(\overrightarrow{w}) = 3\,\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.$$

Portanto, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ devem ser autovetores de T associados aos autovalores 1 e 3, respetivamente. Pelo segundo item podemos escolher

$$\overrightarrow{u} = (1,0,0), \quad \overrightarrow{v} = (0,1,0).$$

Escrevamos (na base canônica) $\overrightarrow{w} = (a,b,c)$. Sabemos que

$$T(\overrightarrow{w}) = (a+c, 3\,b+c, 3\,c).$$

Portanto,

$$(a+c, 3\,b+c, 3\,c) = (3\,a, 3\,b, 3\,c) + (0,1,0).$$

Logo

$$a = 1/2, \quad c = 1, \quad b = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$\gamma = \{(1,0,0), (0,1,0), (1/2, t, 1)\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$