P4 de Álgebra Linear I – 2008.2

Data: 28 de Novembro de 2008.

Gabarito.

1) (Enunciado da prova tipo A)

a) Considere o plano

$$\pi\colon x + 2\,y + z = 0.$$

Determine a equação cartesiana de um plano ρ tal que a distância entre ρ e π seja $\sqrt{5}$.

---

b) Determine a equação cartesiana do plano π que contém as retas r e s,

$$r\colon (1+t, 2+t, 1+2\,t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad s\colon (1+2\,t, 2\,t, 4\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

c) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cuja matriz na base canônica $[T]_{\mathcal{E}}$ é o produto das matrizes

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Determine uma base η da imagem de T e a equação cartesiana da imagem de T.

Lembre que a imagem de T, $\mathrm{im}(T)$, é o conjunto

$$\mathrm{im}(T) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\}.$$

Respostas:

(a) O plano ρ deve ser paralelo ao plano π (em caso contrário a distância seria zero). Portanto, a equação plano ρ é da forma

$$\rho\colon x + 2\,y + z = b,$$

para certo b.

A distância d entre os planos ρ e π é a distância entre qualquer ponto de ρ (por exemplo, o ponto $B = (b, 0, 0)$) e π. Considere a reta r que contém o ponto B e é perpendicular ao plano π,

$$r\colon (b + t, 2\,t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Seja A o ponto de interseção de π e r. Então $d = |\overline{AB}|$. Para determinar A, devemos determinar t tal que

$$b + t + 2\,(2\,t) + t = 0, \quad t = -b/6.$$

Portanto,

$$A = (5\,b/6, -2\,b/6, -b/6), \qquad \overline{AB} = (b/6, 2\,b/6, b/6).$$

Portanto,

$$d = |\overline{AB}| = \frac{\sqrt{6}\,|b|}{6}.$$

Queremos que

$$d = |\overline{AB}| = \frac{\sqrt{6}\,|b|}{6} = \sqrt{5}.$$

Portanto

$$b = \pm\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{30}.$$

Respostas:

prova tipo A:

$$\rho\colon x + 2\,y + z = \pm\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{30}.$$

prova tipo B:

$$\rho\colon x + 2\,y + z = \pm\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{6}} = \sqrt{42}.$$

prova tipo C:

$$\rho\colon x + 2\,y + z = \pm\frac{6\sqrt{11}}{\sqrt{6}} = \sqrt{66}.$$

prova tipo D:

$$\rho\colon x + 2\,y + z = \pm\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{18}.$$

(b) As retas r e s são paralelas. Consideramos um vetor diretor $\overrightarrow{w} = (1,1,2)$ destas retas e os pontos $A = (1,2,1) \in r$ e $B = (1,0,0) \in s$. Um vetor normal $\overrightarrow{n}$ do plano π é

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{BA} = (1,1,2) \times (0,2,1) \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-1,2).$$

Portanto a equação cartesiana de π é da forma

$$\pi\colon 3\,x + y - 2\,z = d.$$

Como $B \in \pi$, $3 = d$. Portanto,

$$\pi\colon 3\,x + y - 2\,z = 3.$$

Respostas:

prova tipo A:

$$\pi\colon 3\,x + y - 2\,z = 3.$$

prova tipo B:

$$\pi\colon 3\,x - 2\,y + z = 3.$$

prova tipo C:

$$\pi \colon x + 3\,y - 2\,z = 3.$$

prova tipo D:

$$\pi \colon 2\,x - 3\,y - z = -3.$$

(c) A expressão da matriz T em forma de produto $P\,D\,P^{-1}$ (D diagonal) implica que

$$T(1,2,1) = 3\,(1,2,1), \qquad T(0,1,1) = (0,1,1), \qquad T(1,2,0) = (0,0,0).$$

Também implica que os vetores

$$\{(1,2,1),(0,1,1),(0,1,1)\}$$

formam uma base (vc. pode usar que suas colunas formam a matriz P com inversa ou que são autovetores com autovalores associados diferentes, portanto linearmente independentes). Assim, a imagem de T está gerada pelas imagens destes vetores. Isto é, $(1,2,1)$ e $(0,1,1)$ geram a imagem. Como estes vetores são l.i. eles determinam uma base da imagem.

Para determinar a equação cartesiana da imagem calculamos

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,1).$$

Portanto,

$$\mathrm{im}(T) \colon x - y + z = 0.$$

Respostas:

prova tipo A:

- base da imagem $\{(1,2,1),(0,1,1)\}$
- $\mathrm{im}(T) \colon x - y + z = 0.$

prova tipo B:

- base da imagem $\{(1,1,2),(0,1,1)\}$
- $\mathrm{im}(T)\colon x+y-z=0$.

prova tipo C:

- base da imagem $\{(1,1,1),(0,2,1)\}$
- $\mathrm{im}(T)\colon x+y-2\,z=0$.

prova tipo D:

- base da imagem $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$
- $\mathrm{im}(T)\colon x-2\,y+z=0$.

---

2) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$,

$$\beta=\{(1,0,1),\,(1,1,0),\,(1,1,1)\}$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que verifica

- $T(1,0,1)=(2,1,1)=(1,0,1)+(1,1,0)$
- $T(1,1,0)=(2,2,1)=(1,1,0)+(1,1,1)$,
- $T(1,1,1)=(2,1,2)=(1,0,1)+(1,1,1)$.

a) Determine a matriz de T na base canônica.

b) Determine a matriz de T na base β.

c) Determine uma base da imagem da tranformação linear T. Lembre que a imagem de T, $\mathrm{im}(T)$, é o conjunto

$$\mathrm{im}(T)=\{\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^3\text{tal que existe }\overrightarrow{w}\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }T(\overrightarrow{w})=\overrightarrow{v}\}.$$

d) Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{w}=(2,0,1)$ na base beta.

e) Determine a matriz de mudança de base da base β para a base canônica.

Observação: as coordenadas dos vetores da base β e do vetor $\overrightarrow{w}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$.

Resposta:

(2.a) Observe que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{k}) &= T\big((1,1,1)-(1,1,0)\big) = T(1,1,1) - T(1,0,1) = \\ &= (2,1,2)-(2,2,1) = (0,-1,1) \end{aligned}$$

Temos também

$$(2,1,1) = T(1,0,1) = T(\mathbf{i}) + T(\mathbf{k}) = T(\mathbf{i}) + (0,-1,1).$$

Portanto,

$$T(\mathbf{i}) = (2,2,0).$$

Finalmente,

$$(2,2,1) = T(1,1,0) = T(\mathbf{i}) + T(\mathbf{j}) = (2,2,0) + T(\mathbf{j}).$$

Portanto,

$$T(\mathbf{j}) = (0,0,1).$$

Portanto, a matriz de T na base canônica é

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.b) Temos a base de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (1,0,1),\ \overrightarrow{u}_2 = (1,1,0),\ \overrightarrow{u}_3 = (1,1,1)\}.$$

e

$$T(\overrightarrow{u}_1) = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2, \qquad T(\overrightarrow{u}_2) = \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3, \qquad T(\overrightarrow{u}_3) = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_3.$$

Portanto, a matriz de T na base β é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.c) A imagem de T está gerada pelos vetores coluna da matriz de T. Como o determinante (produto misto $T(\mathbf{i}) \cdot (T(\mathbf{j}) \times T(\mathbf{k}))$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(1-0) + 1(1-0) = 2$$

é diferente de zero, estes vetores formam uma base da imagem. Portanto, a imagem é $\mathbb{R}^3$ (três vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ geram $\mathbb{R}^3$ e formam uma base de $\mathbb{R}^3$). Assim vc. pode escolher qualquer conjunto formado por três vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$, por exemplo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$.

Para responder a esta questão vc. não necessita calcular a matriz de T. Observe que

$$\beta = \{(1,0,1),\, (1,1,0),\, (1,1,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ e a imagem de T é gerada pelos vetores

$$T(1,0,1) = (2,1,1), \quad T(1,1,0) = (2,2,1), \quad T(1,1,1) = (2,1,2).$$

Estes vetores são linearmente independentes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Portanto, a imagem é $\mathbb{R}^3$. Vc. agora pode raciocinar como acima ou simplesmente escolher a base

$$\{(2,1,1), (2,2,1), (2,1,2)\}.$$

(2.d) Queremos determinar as coordenas de $\overrightarrow{w} = (2,0,1)$ na base β, $(\overrightarrow{w})_\beta = (x,y,z)$. Isto significa que

$$(2,0,1) = x\,(1,0,1) + y\,(1,1,0) + z\,(1,1,1).$$

Obtemos o sistema linear de equações

$$2 = x + y + z, \quad 0 = y + z, \quad 1 = x + z.$$

Da primeria e da terceira equações obtemos $y = 1$. Portanto $z = -1$ e $x = 2$. Assim temos

$$(\overrightarrow{w})_\beta = (2, 1, -1).$$

(2.e) A matriz de mudança de base da base β para a base canônica é a matriz cujas colunas são os vetores da base β:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

3) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os de autovalores de T.

b) Determine uma base de autovetores de T

$$\gamma = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\},$$

tal que

- $\overrightarrow{u}_1$ é um autovetor associado a $\sigma < 0$,
- $\overrightarrow{u}_2$ é um autovetor associado a $\lambda > 0$,
- $\overrightarrow{u}_3$ é um autovetor associado a 0.

c) Determine a matriz E de T na base γ.

d) Considere agora a base de $\mathbb{R}^3$

$$\alpha = \{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

Escreva a matriz P de mudança de base da base canônica para a base α.

Observação: as coordenadas dos vetores da base γ e do vetor $\overrightarrow{w}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$.

Resposta:

(3.a) Calcularemos os autovalores de T.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -5 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\big((2+\lambda)(1+\lambda)-6\big)+$$

$$+2\,(-3-3\,\lambda+3)-5\,(-6+2+\lambda)=$$

$$=(5-\lambda)\left(\lambda^2+3\,\lambda-4\right)-6\,\lambda+20-5\,\lambda=$$

$$=(-\lambda^3+2\,\lambda^2+19\,\lambda-20)+20-11\,\lambda=$$

$$=-\lambda^3+2\,\lambda^2+8\,\lambda=-\lambda\,(\lambda^2-2\,\lambda-8).$$

Portanto, as raizes do polinômio característico são $\lambda=0$ e

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}, \qquad \lambda=4, \quad \lambda=-2.$$

(3.b) Calcularemos os autovetores associados aos autovalores para obter a base γ.

autovetores associados a 0, vetor $\overrightarrow{u}_3$ da base γ:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos

$$5\,x-2\,y-5\,z=0, \qquad 3\,x-2\,y-3\,z=0, \qquad x-2\,y-z=0.$$

Fazendo a diferença entre qualquer par de equações obtemos $x=z$ e portanto $y=0$.

Assim os autovetores associados a 0 são da forma $(t, 0, t)$, $t \neq 0$. Escolhemos, por exemplo,

$$\overrightarrow{u}_3 = (1, 0, 1).$$

autovetores associados a 4, vetor $\overrightarrow{u}_2$ da base γ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & -6 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos

$$x - 2\,y - 5\,z = 0, \qquad 3\,x - 6\,y - 3\,z = 0, \qquad x - 2\,y - 5\,z = 0.$$

Ou seja,

$$x - 2\,y - 5\,z = 0, \qquad x - 2\,y - z = 0.$$

Escalonando temos $z = 0$. Portanto, $x = 2\,y$.

Assim os autovetores associados a 4 são da forma $(2\,t, t, 0)$, $t \neq 0$. Escolhemos, por exemplo,

$$\overrightarrow{u}_2 = (2, 1, 0).$$

autovetores associados a -2, vetor $\overrightarrow{u}_1$ da base γ:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos

$$7\,x - 2\,y - 5\,z = 0, \qquad 3\,x - 3\,z = 0, \qquad x - 2\,y + z = 0.$$

A segunda equação implica $x = z$. Portanto $y = x = z$.

Assim os autovetores associados a -2 são da forma (t, t, t), $t \neq 0$. Escolhemos, por exemplo,

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, 1, 1).$$

Portanto,

$$\gamma = \{\overrightarrow{u}_1 = (1, 1, 1), \overrightarrow{u}_2 = (2, 1, 0), \overrightarrow{u}_3 = (1, 0, 1)\},$$

(3.c) Como temos

$$T(\overrightarrow{u}_1) = -2\,\overrightarrow{u}_1, \qquad T(\overrightarrow{u}_2) = 4\,\overrightarrow{u}_2, \qquad T(\overrightarrow{u}_3) = \overrightarrow{0} = 0\,\overrightarrow{u}_3,$$

a matriz E de T na bae γ é

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3.d) Observe que a matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz de mudança de base da base de autovetores α para a base canônica. Portanto, $P = Q^{-1}$. Assim temos que calcular a matriz inversa de Q. Usaremos4 o método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação: linha II - linha I e linha III - linha I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação: troca de linhas II e III, -1/2 linha II e -(linha III).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

operação: linha III - (linha II).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

operação: linha I - 2 (linha II).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

operação: linha I - (linha III).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$