P4 de Álgebra Linear I – 2005.2

Data: 28 de novembro de 2005.

Gabarito

---

1) Considere o conjunto de vetores

$$\gamma = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)\}.$$

1.a) Obtenha uma base β de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores do conjunto γ.

1.b) Determine explicitamente a matriz M de mudança de base da base canônica à base β.

1.c) Considere uma base η de $\mathbb{R}^3$

$$\eta = \{(1,0,1),(1,1,1),(a,b,c)\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor $v = (1,2,3)$ na base η são

$$(v)_\eta = (1,1,1)$$

determine o vetor (a,b,c).

Resposta:

1.a) Observe que os vetores $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$ não são paralelos e geram o plano π cujo vetor normal n é

$$n = (1,1,0) \times (1,0,1) = (1,-1,-1).$$

Logo

$$\pi \colon x - y - z = 0.$$

Observe que o vetor $(0,1,1)$ não pertence ao plano π, pois

$$0-1-1=-2\neq 0.$$

Portanto, os vetores $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$ não são coplanares, logo são linearmente independentes. Como três vetores linearmente independentes formam uma base de $\mathbb{R}^3$, uma possível base β_1 é:

$$\beta_1=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

Observe que o vetor $(0,1,0)$ não pertence a π, logo outra possibilidade para a escolha da base é

$$\beta_2=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,0)\}.$$

V. pode verificar que há (exluida a ordem dos vetores da base) outras duas possibilidades para a escolha da base β:

- $\beta_3=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)\}$;
- $\beta_4=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)\}$.

Para ver que os conjuntos acima formam bases é suficiente calcular os produtos mistos dos vetores e verificar que são diferentes de zero.

1.b) Resolveremos o segundo item para a base β_1 acima. Observe que a matriz de mudança de base da base β_1 para a base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz procurada é a inversa da matriz acima. Calcularemos esta inversa usando o método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Portanto, a matriz de mudança de base da base canônica para a base β_1 é

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} & \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{-1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Para as outras escolhas de base temos as seguintes respostas:

da base canônica para a base β_2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

da base canônica para a base β_3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

da base canônica para a base β_4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

1.c) Como as coordenadas do vetor $v = (1, 2, 3)$ na base β são

$$(v)_\eta = (1, 1, 1),$$

obtemos

$$(1, 2, 3) = (1, 0, 1) + (1, 1, 1) + (a, b, c).$$

Logo

$$1 = 1 + 1 + a, \quad 2 = 0 + 1 + b, \quad 3 = 1 + 1 + c.$$

Portanto,

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = 1.$$

Logo, $v = (-1, 1, 1)$.

---

2) Considere a transformação linear

$$A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que verifica

$$A(1,1,1) = (1,0,1), \quad A(1,0,1) = (1,1,1), \quad A(0,1,1) = (1,0,1).$$

2.a) Estude se a matriz de A na base canônica é ortogonal.

2.b) Determine a matriz de A na base canônica.

2.c) Determine um autovalor λ de A e um autovetor de A associado a λ.

2.d) Determine a equação cartesiana do conjunto imagem de A.

2.e) Determine o conjunto de vetores v de $\mathbb{R}^3$ que verificam

$$A(v) = (2, 1, 2).$$

2.f) Encontre uma base η onde a matriz de A seja da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

2.a) Se a matriz de A na base canônica fosse ortogonal A conservaria módulos, mas o vetor $(1,1,1)$ tem módulo $\sqrt{3}$ e sua imagem $A(1,1,1) = (1,0,1)$ tem módulo $\sqrt{2}$. Portanto, a resposta é negativa.

Outra forma de responder, sem fazer contas, é observar que se a matriz de A na base canônica fosse ortogonal então A seria sobrejetora, mas a imagem de A é o subespaço gerado pelos vetores $(1,0,1)$ e $(1,1,1)$, isto é, é um plano, e portanto não é sobre.

Finalmente, outra possibilidade é observar que se a matriz de A na base canônica fosse ortogonal então A seria injetora, mas

$$A(1,0,0) = A(1,1,1) - A(0,1,1) = (1,0,1) - (1,0,1) = (0,0,0).$$

Outra possibilidade, é calcular a matriz de A na base canônica e ver que a matriz não é ortogonal, isto é feito no próximo item.

2.b) Observe que

$$(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1).$$

Portanto,

$$A(1,0,0) = A(1,1,1) - A(0,1,1) = (1,0,1) - (1,0,1) = (0,0,0).$$

Temos

$$(0,0,1) = (1,0,1) - (1,0,0),$$

logo

$$A(0,0,1) = A(1,0,1) - A(1,0,0) = (1,1,1).$$

Finalmente,

$$(0,1,0) = (0,1,1) - (0,0,1),$$

e assim

$$A(0,1,0) = A(0,1,1) - A(0,0,1) = (1,0,1) - (1,1,1) = (0,-1,0).$$

Portanto, a matriz de A na base canônica é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, verificamos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E vemos que a matriz de A está corretamente calculada.

É obvio que a matriz não é ortogonal: os vetores primeira e terceira coluna não têm módulo 1 e os vetores segunda e terceira coluna não são ortogonais.

2.c) É óbvio que 0 é um autovetor e $(1, 0, 0)$ é um autovalor associado a 0 (de fato, já fizemos estes cálculos).

Se v. não percebeu isto, pode calcular o polinômio característico de A:

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Os seja os autovalores de A são

$$0, \qquad 1, \qquad -1.$$

V. agora pode calcular os autovetores e obter:

- os autovetores associados a 0 são da forma $(t, 0, 0)$, $t \neq 0$, um autovetor é $(1, 0, 0)$;
- os autovetores associados a -1 são da forma $(0, t, 0)$, $t \neq 0$, um autovetor é $(0, 1, 0)$;
- os autovetores associados a 1 são da forma $(2\,t, t, 2\,t)$, $t \neq 0$, um autovetor é $(2, 1, 2)$.

Para determinar os autovetores de (-1) v. deve resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 0-(-1) & 0 & 1 \\ 0 & (-1)-(-1) & 1 \\ 0 & 0 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Isto é

$$x + z = 0, \quad z = 0, \quad 2\,z = 0.$$

Logo $x = 0 = z$ e não há condição para y.

Para determinar os autovetores de (-1) v. deve resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 0-(1) & 0 & 1 \\ 0 & (-1)-(1) & 1 \\ 0 & 0 & 1-(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Isto é

$$-x + z = 0, \quad -2\,y + z = 0,$$

Logo $x = z$ e $z = 2\,y$.

2.d) O conjunto imagem está gerado pelos vetores coluna da matriz de A, isto é pelos vetores $(0, -1, 0)$ e $(1, 1, 1)$. Portanto, a imagem é um plano cujo vetor normal n é

$$n = (0, -1, 0) \times (1, 1, 1) = (-1, 0, 1).$$

Portanto, a resposta é

$$x - z = 0.$$

2.e) Para determinar os autovetores de v tais que $A(v) = (2, 1, 2)$ v. deve resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad z = 2, \quad -y + z = 1.$$

Logo $z = 2$ e $y = 1$, e não há condição para x (x pode ser qualquer).Portanto,

$$(t, 1, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.f) Escreva

$$\eta = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

Como a matriz de A na base η é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

temos

$$A(v_1) = 0, \quad A(v_2) = v_3, A(v_3) = v_2.$$

Portanto, v_1 é uma autovetor de 0 e podemos escolher $(1, 0, 0)$. Por outro lado, do enunciado do problema temos

$$A(1, 1, 1) = (1, 0, 1), \qquad A(1, 0, 1) = (1, 1, 1).$$

Logo podemos escolher

$$\eta = \{(1, 0, 0); (1, 1, 1); (1, 0, 1)\}.$$

Em qualquer caso, vejamos como proceder caso v. não perceba esta relação.Escrevemos $v_2 = (a, b, c)$ e $v_3 = (d, e, f)$. Temos

$$A(v_2) = v_3, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix},$$

Isto é

$$a = f, \quad -b + c = e, \quad c = f.$$

Analogamente,

$$A(v_3) = v_2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

Isto é

$$d = c, \quad -e + f = c, \quad c = f.$$

Necessitamos apenas uma solução não trivial, fazendo $f = 1$ obtemos $a = c = d = 1$. As equações agora ficam

$$-b + 1 = e, \quad -e + 1 = 1.$$

Logo $e = 0$ e $b = 1$. Obtemos

$$(1, 1, 1), \quad (1, 0, 1).$$

Obviamente, v. pode fazer outras escolhas.

---

3) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine **explicitamente** matrizes P, P^{-1} e D que verificam

$$M = P\, D\, P^{-1},$$

onde P é ortogonal e D é diagonal.

Resposta: O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = (6-\lambda)((1-\lambda)^2 - 9)) = (6-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

Observe que o polinômio $(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$ tem raízes

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3.$$

Logo as raízes são $\lambda = 4$ e $\lambda = -2$. Assim as raízes do polinômio característico $p(\lambda)$ são os autovalores. Portanto,

$$\text{autovalores:} \qquad 6, \quad 4, \quad -2.$$

Observe que este resultado é coerente com o traço ser 8 (soma dos autovalres) e o determinante ser -48 (produto dos autovalores).

A próxima etapa é obter uma base de autovetores de M.

• **autovetores associados a 6:** são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 0 & 3 \\ 0 & 6-6 & 0 \\ 3 & 0 & 1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-5x + 3y = 0, \quad 3x - 5y = 0.$$

As soluções são da forma $(0, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(0, 1, 0)$.

• **autovetores associados a 4:** são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 0 & 3 \\ 0 & 6-4 & 0 \\ 3 & 0 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-3x + 3z = 0, \quad 2y = 0, \quad 3x - 3z = 0.$$

As soluções são da forma $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(1, 0, 1)$.

• **autovetores associados a -2:** Como a matriz é simétrica, os autovetores associados a -2 devem ser ortogonais a $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$. Logo um autovetor é $(1, 0, -1)$. Verifique. V. também pode resolver sistemas de equações como os de acima.

Portanto, uma base de autovetores é

$$\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}.$$

Na base β a matriz de A é diagonal da forma

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Obtemos assim uma forma diagonal.

Para calcular P e P^{-1} devemos considerar bases ortogonais de autovetores e lembrar que nesse caso se verifica $P^{-1} = P^t$.

Considerando agora uma base ortonormal de autovetores de A,

$$\gamma = \{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\},$$

temos

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Como P é ortogonal,

$$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$