P4 de Álgebra Linear I – 2005.1
15 de junho de 2005
Gabarito

---

1) Considere os pontos

$$A = (1, 0, 1), \quad B = (2, 2, 4), \quad \text{e} \quad C = (1, 2, 3).$$

(1.a) Determine o ponto médio M do segmento AB.

(1.b) Determine a equação cartesiana do plano π formado pelos pontos equidistantes de A e B (isto é, $\text{dist}(XA) = \text{dist}(XB)$).

(1.c) Determine o ponto D da reta

$$r = \{(3t - 5, t, 2t - 2), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

que é equidistante aos pontos A e B, isto é, $\text{dist}(AD) = \text{dist}(BD)$.

(1.d) Determine a equação cartesiana do plano ρ que contém os pontos A, B e C.

Resposta: O ponto M tem coordenadas

$$M = \frac{A + B}{2} = (3/2, 2/2, 5/2) = (3/2, 1, 5/2).$$

O plano π é obtido como o plano que contém o ponto M e é perpendicular ao vetor $n = \overline{AB} = (1, 2, 3)$,

$$\pi \colon x + 2y + 3z = d,$$

como $M \in \pi$,

$$1\,(3/2) + 2\,(1) + 3\,(5/2) = 11 = d.$$

Portanto,

$$\pi \colon x + 2y + 3z = 11.$$

O ponto D é obtido como interseção da reta r e do plano π. Portanto, devemos encontrar o valor de t tal que

$$(3t-5)+2\,(t)+3\,(2t-2)=11,$$

isto é,

$$3t-5+2t+6t-6=11, \quad 11t=22.$$

Logo $t=2$ e

$$D=(1,2,2).$$

Para determinar o plano ρ observe que os vetores

$$\overline{AB}=v=(1,2,3), \quad \text{e} \quad \overline{AC}=w=(0,2,2)$$

são paralelos a ρ. Portanto, um vetor normal n de ρ é

$$n=(1,2,3)\times(0,2,2)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(-2,-2,2).$$

Logo podemos escolher como vetor normal do plano $(1,1,-1)$. Temos

$$\rho\colon x+y-z=d,$$

onde d é obtido pela condição $A\in\rho$:

$$1+0-1=d=0.$$

Portanto,

$$\rho\colon x+y-z=0.$$

---

2)

(2.a) Determine a matriz na base canônica de uma transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,$$

tal que

- $T((x+2y+2z=0)) = \{(t,0,t),\, t \in \mathbb{R}\}$,
- a imagem de T (denotada $\mathrm{im}(T)$) é o plano $x-y-z=0$ (lembre que $\mathrm{im}\,(T) = \{u \in \mathbb{R}^3$ tal que existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = u\}$).

(2.b) Para a transformação do item (a) determine o conjunto de vetores w tal que $T(w) = \bar{0}$.

(2.c) Determine a forma matricial (na base canônica) de uma transformação afim

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

tal que

$$L((x+2y+2z=0)) = \{(1+t,0,1+t),\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Resposta: Observe que a transformação linear T estará totalmente determinada quando conhecidas as imagens dos vetores de uma base de $\mathbb{R}^3$.

Como a imagem do plano $2x+y+z=0$ é a reta $(t,0,t)$, os vetores paralelos ao plano π devem se transformar em vetores paralelos a $(1,0,1)$ (e não podem se transformar todos no vetor nulo, pois em tal caso a imagem seria a origem). Por exemplo,

$$T(0,1,-1) = (1,0,1), \qquad T(2,0,-1) = (1,0,1).$$

Consideramos agora uma base β de $\mathbb{R}^3$ que contenha aos vetores $(1,0,1)$ e $(2,-1,0)$. Por exemplo:

$$\beta = \{(0,1,-1),(2,0,-1),(0,0,1)\}.$$

Verifique (usando o produto misto) que estes vetores de fato formam uma base.

Como a imagem de T é o plano $x-y-z=0$ que contém à reta $(t,0,t)$ a imagem do vetor $(0,0,1)$ deve ser um vetor do plano diferente do vetor zero e não paralelo ao vetor $(1,0,1)$ (pois em tal caso a imagem seria uma reta). Por exemplo,

$$T(0,0,1) = (1,1,0).$$

Observe que

$$T(0,1,0) = T(0,1,-1) + T(0,0,1) = (1,0,1) + (1,1,0) = (2,1,1).$$

Temos também

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= 1/2\,(T(2,0,-1)+T(0,0,1)) = \\ &= 1/2\,((1,0,1)+(1,1,0)) = (1,1/2,1/2). \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de T na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular os vetores que verificam $T(w) = \bar{0}$ devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$x + 2y + z = 0, \quad x + 2y + 2z = 0, \quad x + 2y = 0.$$

Logo $z = 0$, e obtemos os vetores da forma

$$(2t, -t, 0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Para o último item é suficiente considererar a composição da transformação linear do item (a) com uma translação que leva a origem $(0,0,0)$ (do plano $x + 2y + 2z = 0$) no ponto $(1,0,1)$ (da reta $(1+t, 0, 1+t)$), isto é

$$[L] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

3) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3.a) Determine uma forma diagonal D de T.

(3.b) Determine uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal a matriz de T na base β seja D.

(3.c) Estude se existe uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Em caso afirmativo determine a base γ.

(3.d) Estude se existe uma base η de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base η seja

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resposta: O polinômio característico de T é

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\,(\lambda^2 - 4\lambda + 3).$$

As raizes do polinômio são

$$\lambda = -1, \quad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}.$$

Isto é, os autovalores de T são,

$$-1, \quad 1, \quad 3,$$

todos de multiplicidade 1 (observe que a soma dos autovalores coincide com o traço da matriz). Portanto, a matriz é diagonalizável, e uma forma diagonal é

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que $[T]_\beta = D$ deve ser uma base de autovetores de T tais que

$$T(u_1) = -u_1, \quad T(u_2) = u_2, \quad T(u_3) = 3u_3.$$

Portanto, os autovetores u_1 associados a -1 são as soluções não triviais do sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y = z = 0.$$

Logo podemos escolher $u_1 = (1, 0, 0)$.

Analogamente, os autovetores u_2 associados a 1 são as soluções não triviais do sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = -z, \quad -2x - y = 0,$$

Logo podemos escolher $u_2 = (1, -2, 2)$.

Finalmente, os autovetores u_3 associados a 3 são as soluções não triviais do sistema

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = z, \quad 4x = 5y.$$

Logo podemos escolher $u_3 = (5, 4, 4)$.

Portanto, podemos escolher

$$\beta = \{(1, 0, 0), (1, -2, 2), (5, 4, 4)\}.$$

Suponha que $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ é a base pedida no item (c). Por definição temos

$$T(w_1) = (-w_1), \quad T(w_2) = w_2, \quad T(w_3) = 3w_3 + w_2.$$

Portanto, w_1 e w_2 são autovetores de T associados a -1 e 1, respectivamente. Portanto, pelo item anterior podemos escolher

$$w_1 = (1, 0, 0), \quad w_2 = (1, -2, 2).$$

Finalmente, seja $w_3 = (a, b, c)$ (escrito na base canônica). Temos (na base canônica)

$$T(w_3) = (-a + 2b + 3c, 2b + c, b + 2c) = (3a, 3b, 3c) + (1, -2, 2).$$

Logo devemos resolver o sistema

$$-a + 2b + 3c = 3a + 1, \quad 2b + c = 3b - 2, \quad b + 2c = 3c + 2.$$

Como as duas últimas equações são a mesma, temos

$$c = b - 2.$$

Portanto, podemos fazer $b = 0$ e $c = -2$. Finalmente, $4a = 3c - 1$, $a = -7/4$. Logo

$$\beta = \{(1, 0, 0), (1, -2, 2), (-7/4, 0, -2)\}.$$

A resposta do último item é negativa. Observe que $[T]_\gamma$ e $[T]_\eta$ são necessariamente semelhantes pois

$$[T]_\gamma = P\,[T]_\eta\,P^{-1},$$

onde P é a matriz de mudança de base da base η para à base γ. E lembre que matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades.

Como as matrizes são diagonais, os autovalores são os elementos da diagonal principal com as multiplicidades correspondentes. Mas os autovalores de $[T]_\gamma$ são $(-1), 1$ e 3 (todos simples) e os autovalores de $[T]_\eta$ são (-1) (multiplicidade dois) e 3 simples.

---

4) Considere o espelhamento E no plano $\pi\colon x - 2y - 2z = 0$.

(4.a) Determine uma matriz R tal que

$$[E] = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} R^t.$$

(4.b) Determine a matriz $[E]$ de E na base canônica.

Considere agora a base ortogonal β de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\beta = \{(1,0,1),(27,32,-27),(-32,54,32)\}.$$

(4.c) Determine a primeira coordenada do vetor $(1,2,3)$ na base β, (isto é, se as coordenadas de $(1,2,3)$ na base β são $(1,2,3)_\beta = (a,b,c)$, determine a).

Resposta: A matriz R deve ser uma matriz ortogonal onde a primeira e a segunda colunas correspondem a autovetores de E associados a 1 e a terceira coluna a um autovetor de E associado a (-1). Estes autovetores devem formar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Escolhemos a base ortogonal os autovetores de E

- $(1,-2,-2)$ associado a -1,
- $(0,1,-1)$ associado a 1,
- $(1,-2,-2)\times(0,1,-1)=(4,1,1)$ associado a 1.

Normalizando obtemos a base

$$\eta = \{1/3\sqrt{2}\,(4,1,1),\, 1/\sqrt{2}\,(0,1,-1),\, 1/3\,(1,-2,-2)\}$$

obtendo a matriz

$$R = \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{2} & 0 & 1/3 \\ 1/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Temos agora que a matriz de E na base canônica é

$$\begin{pmatrix} 4/3\sqrt{2} & 0 & 1/3 \\ 1/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Isto é

$$
\begin{aligned}
[E] &= \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{2} & 0 & 1/3 \\ 1/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 16/18+0-1/9 & 4/18+0+2/9 & 4/18+0+2/9 \\ 4/18+0+2/9 & 1/18+1/2-4/9 & 1/18-1/2-4/9 \\ 4/18+0+2/9 & 1/18-1/2-4/9 & 1/18+1/2-4/9 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & 4/9 \\ 4/9 & 1/9 & -8/9 \\ 4/9 & -8/9 & 1/9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Observe que o resultado é uma matriz ortogonal e simétrica de traço igual a 1.

Finalmente, sejam (a, b, c) as coordenadas do vetor $(1, 2, 3)$ na base

$$\beta = \{(1, 0, 1), (27, 32, -27), (-32, 54, 32)\}.$$

Então

$$(1, 2, 3) = a\,(1, 0, 1) + b\,(27, 32, -27) + c\,(-32, 54, 32)$$

Temos

$$
\begin{aligned}
(1, 2, 3) \cdot (1, 0, 1) &= a\,(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) + \\
&\quad + b\,(27, 32, -27) \cdot (1, 0, 1) + c\,(-32, 54, 32) \cdot (1, 0, 1).
\end{aligned}
$$

Logo $4 = 2a$ e $a = 2$.