$\boxed{\textbf{Prova Modelo}}$

P4 de Álgebra Linear I – 2004.2 (29/11/04)

$\boxed{\textbf{Gabarito}}$

---

1)

a) Considere o ponto $Q = (2, 1, 3)$ e a reta r de equações paramétricas

$$r\colon (x, y, z) = (1, 4, 2) + t(1, -1, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine o ponto A de r mais próximo de Q.

b) Considere a reta s de equações paramétricas

$$s\colon (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(2, 1, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine as equações cartesianas de um plano ρ paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e que contenha a reta s.

c) Considere as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1 = (1 + t, 1 - t, 1 + 2t), \quad t \in \mathbb{R};$$
$$r_2 = (2t, -1 + t, 4 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso as retas sejam reversas responda **reversas** e calcule a distância entre as retas. Caso as retas sejam concorrentes responda **concorrentes** e determine o ponto de interseção.

Respostas: O ponto A da reta r mais próximo do ponto Q é o ponto de interseção do plano π perpendicular à reta r que contém o ponto Q e a própria reta r. O vetor normal n do plano π é o vetor diretor da reta r, $n = (1, -1, 2)$. Portanto, a equação cartesiana de π é

$$\pi\colon x - y + 2z = d,$$

como $Q \in r$ temos

$$2 - 1 + 6 = 7 = d.$$

Logo,

$$\pi\colon x - y + 2z = 7.$$

A interseção do plano π e a reta r ocorre quando o parâmetro t verifica:

$$(1 + t) - (4 - t) + 2(2 + 2t) = 7, \qquad 6t + 1 = 7, \quad t = 1.$$

Portanto,

$$A = (2, 3, 4).$$

Verifique que o vetor $AQ = (0, -2, -1)$ é ortogonal ao vetor diretor da reta, $(1, -1, 2)$.

Como o plano ρ contém a reta s temos que $(2, 1, -2)$ é um vetor paralelo ao plano. Como o plano ρ é paralelo ao eixo $\mathbb{X}$, $(1, 0, 0)$ é paralelo a ρ. Portanto, um vetor normal do plano é

$$n = (2, 1, -2) \times (1, 0, 0) = (0, -2, -1).$$

Logo a equação cartesiana de ρ é da forma:

$$\rho\colon 2y + z = d.$$

como $(1, 2, 3) \in \rho$ temos

$$4 + 3 = 7 = d.$$

Logo

$$\rho\colon 2y + z = 7.$$

Para determinar se as retas se interceptam devemos verificar se o sistema:

$$1 + t = 2s, \qquad 1 - t = -1 + s, \qquad 1 + 2t = 4 - s,$$

tem solução, Resolvendo (ou tentando resolver), usamos as duas primeiras equações,

$$t = 2s - 1, \quad 1 - 2s + 1 = -1 + s, \quad s = 1, \quad t = 1.$$

Vemos que este resultado é compatível com a última equação. Portanto, o sistema tem solução. Logo as retas são concorrentes e o ponto de interseção é:

$$(2, 0, 3).$$

---

2) Considere a matriz N

$$N = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de N e suas multiplicidades.

b) Determine uma base β de autovetores de N.

c) Determine uma matriz D diagonal e uma matriz P tais que

$$N = P\, D\, P^t.$$

d) Considere a matriz $M = N^{-1}$, a matriz inversa de N. Escreva M da forma

$$M = Q\, E\, Q^{-1},$$

onde E é uma matriz diagonal.

e) Considere a matriz

$$L = \begin{pmatrix} 111 & 1 & 11 \\ 222 & 2 & 22 \\ 333 & 3 & 33 \end{pmatrix}.$$

Determine os autovalores de L e suas multiplicidades.

Respostas: O polinômio característico é

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((4-\lambda)^2-1) + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 4-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)((4-\lambda)^2-1) + 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+15) + 2(\lambda-5) =$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 50.$$

Temos

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 50 = (\lambda-5)(-\lambda^2+7\lambda-10).$$

Logo as raizes são 5 (de multiplicidade 2) e 2 (simples).

Portanto, os autovalores são 5 (de multiplicidade 2) e 2 (simples).

Para determinar os autovalores associados a 5 devemos resolver:

$$\begin{pmatrix} 4-5 & -1 & -1 \\ -1 & 4-5 & -1 \\ -1 & -1 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja

$$-x-y-z=0, \qquad x+y+z=0$$

Como N é simétrica, os autovetores de 2 devem ser ortogonais aos associados a 5. Portanto, $(1,1,1)$ é um autovetor de N associado a 2. Verifique. Escollheremos a base de autovetores ortogonal escolhendo os seguintes autovetores associados a 5: $u=(1,0,-1)$ e $w=(1,0,-1)\times(1,1,1)=(1,-2,1)$. Portanto, uma base de autovetores de N é

$$\beta = \{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}.$$

Temos que uma forma diagonal é

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

De fato, a matriz de N na base β é D. Para escrever $N = P\,D\,P^t$ devemos ter P ortogonal. Portanto, é suficiente normalizar os vetores da base, e a matriz na base γ (normalizada de β) é também D. Agora é suficiente tomar P sendo a matriz cujas colunas são os vetores da base γ (o primeiro vetor coluna associado a 2 e os outros a 5)

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Observe que se N^{-1} é a inversa de N e v é um autovetor de N cujo autovalor associado é σ, temos

$$v = N^{-1}N(v) = N^{-1}(\sigma v) = \sigma N^{-1}(v),$$

Portanto,

$$N^{-1}(v) = \frac{1}{\sigma} v.$$

Ou seja, todo autovetor de N de autovalor σ (que é necessariamente não nulo) é um autovetor de N^{-1} de autovalor $1/\sigma$. Portanto,

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad Q = P.$$

As três linhas da matriz são proporcionais. Portanto, o determinante é zero. Portanto, $\lambda = 0$ é um autovalor. Os autovetores de 0 são a soluções (não nulas) do sistema

$$111x + y + 11z = 0.$$

Como 0 tem dois autovetores l.i., sua multiplicidade é no mínimo 2. Se fosse 3, o traço seria nulo (soma dos autovalores com as multiplicidades). Logo a multiplicidade é dois. Seja σ o outro autovalor, temos

$$0 + 0 + \sigma = 111 + 2 + 33 = 146.$$

Portanto, os autovalores são 0 (multiplicidade 2) e 146 (simples).

3) Considere a reta r de $\mathbb{R}^2$ de equação cartesiana

$$r\colon x = 3\,y - 1$$

e o vetor $v = (1,1)$.

Considere a transformação afim T *projeção na reta* r *na direção do vetor* v, que associa ao vetor $w = \overline{OP}$ o vetor $T(w) = \overline{OQ}$, onde Q é a interseção da reta r e da reta s que contém o ponto P e é paralela ao vetor $v = (1,1)$.

(a) Determine a parte linear L_T de T.

(b) Determine a forma matricial de T.

Resposta: A imagem de (a,b) é a interseção das retas $(a+t, b+t)$ e $x = 3\,y - 1$. A interseção ocorre quando t verifica:

$$a + t = 3\,(b+t) - 1, \quad 2\,t = 1 + a - 3b, \quad t = (1 + a - 3b)/2$$

Logo o ponto de interseção é

$$(3a/2 - 3b/2, a/2 - b/2) + (1/2, 1/2).$$

Observe que $(3a/2 - 3b/2, a/2 - b/2)$ determina a parte linear L_T. Temos

$$L_T(1,0) = (3/2, 1/2), \qquad L_T(0,1) = (-3/2, -1/2).$$

Portanto.

$$[L] = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$[T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

4) Considere os números $1/3, (-1/3), 2/3$ e $(-2/3)$.

a) Utilizando só estes números escreva uma matriz R, 3×3, que represente na base canônica uma rotação (de ângulo diferente de π).

b) Determine o $\cos(\alpha)$ onde α é o ângulo de rotação de R.

c) Determine a equação paramétrica do eixo de rotação de R.

Resposta: A matriz de R deve ser ortogonal. Portanto, o primeiro vetor coluna deve ser ortogonal. Portanto, uma opção é $(2/3, 2/3, 1/3)$. O segundo vetor coluna deve ser ortogonal ao primeiro, mas a matriz não pode ser simétrica (pois em tal caso estariamos obtendo espelhamentos...). Uma possibilidade é $(1/2, -2/3, 1/3)$. Finalmente, a terceira coluna deve ser ortogonal as outras duas, temos duas opções: $(2/3, -1/3, -2/3)$ e $(-2/3, 1/3, 2/3)$. Portanto, obtemos as seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Obviamente, estas duas matrizes têm determinantes 1 e -1. A matriz de determinante 1 corresponde a uma rotação e a de determinante -1 corresponde a uma rotação seguida de um espelhamento em um plano.

Veja que:

$$\begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}(2\,(4+2) - 1\,(-4+1) + 2\,(4+2) =$$

$$= \frac{1}{27}(12 + 3 + 12) = 1$$

Portanto, a primeira opção corresponde a uma rotação.

Observe que uma rotação, em uma base apropriada se escreve da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Portanto, como o traço não depende da base escolhida, temos

$$\text{traço}(R) = 1 + 2\,\cos\alpha = -2/3.$$

Logo,

$$\cos\alpha = -5/6.$$

Finalmente, o eixo de rotação é a reta associada ao autovalor 1. Devemos resolver:

$$\begin{pmatrix} 2/3-1 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3-1 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$-x + y + 2z = 0, \quad 2x - 5y - z = 0, \quad x + 2y - 5z = 0.$$

As soluções do sistema são da forma $(3t, t, t)$, que determina o eixo de rotação.

Outra solução do problema é, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $\cos\alpha = 1/3$ e o eixo de rotação é $(0, t, -t)$.

Finalmente, outra opção:

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $\cos\alpha = -1/3$ e o eixo de rotação é $(0, t, t)$.