(1) Decida se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

(a) Se uma matriz A é ortogonal, então A^{-1} é ortogonal.
Resposta: Verdadeiro.

(b) Se uma matriz B é simétrica e inversivel, então B^{-1} é simétrica.
Resposta: Verdadeiro.

(c) Existe transformação linear sobrejetiva $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
Resposta: Falso.

(d) Se o volume do paralelepipedo gerado por tres vetores v_1, v_2, v_3 em $\mathbb{R}^3$ é 1, então v_1 e v_2, v_1 e v_3, v_2 e v_3 são perpendiculares.
Resposta: Falso.

(e) A imagem de um plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ pela projeção ortogonal em uma reta R cobre a reta R se e somente se o plano não é perpendicular à reta R.
Resposta: Verdadeiro.

(f) A distancia entre duas retas L_1, L_2 em $\mathbb{R}^3$ é diferente de zero se e somente se a imagem de L_1 pela projeção ortogonal em L_2 cobre L_2.
Resposta: Falso.

(g) Uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ possui uma única equação cartesiana.
Resposta: Falso.

(h) A composição de um espelhamento e uma rotação é uma transformação linear ortogonal.
Resposta: Verdadeiro.

(i) Se o traço de uma matriz 3×3 A é 1 e os autovalores de A são inteiros positivos, então A representa a projeção em uma reta de $\mathbb{R}^3$ segundo um plano transversal à reta.
Resposta: Verdadeiro.

(2) Considere a reta L_1 definida pela equação

$$x + y - z = 1$$

$$2x - y = 0,$$

e a reta L_2 definida pela equação

$$x - y + z = 0$$

$$z = -x.$$

(a) Ache equações paramétricas para as retas L_1 e L_2.
Resposta: Uma equação paramétrica para L_1 é

$$r_1(t) = (0, 0, -1) + t(1, 2, 3)$$

e uma equaç ao para L_2 é

$$r_2(t) = t(1, 0, -1)$$

.

(b) Calcule a distancia entre as retas L_1 e L_2.
Resposta: A distancia entre as retas é $1/\sqrt{6}$.

(c) Ache os valores de a para os quais as retas L_1 e L_a definida por

$$x - y + z = 0$$

$$z = -x + a$$

tem interseção.
Resposta: O único valor de a é $a = 1$, e o ponto de interseção entre as retas é $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

(d) Caso exista a tal que $L_1 \cap L_a \neq \emptyset$, ache a equação cartesiana do plano que contém L_1 e L_a.
Resposta: O vetor normal ao plano procurado é perpendicular a ambas as retas, e contém o ponto de interseção obtido no item anterior. A equação do plano é $x - 2y + z = -1$.

(3) Considere a reta $r(t) = (t, t, t)$ e o plano $\pi : \{x + y - z = 0\}$.

(a) Ache a matriz que representa a projeção na reta $r(t)$ segundo o plano π.
Resposta: A transformação linear é $T(x, y, z) = (x + y - z)(1, 1, 1)$, e a matriz na base canónica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Ache a matriz que representa a projeção no plano π segundo a reta $r(t)$.
Resposta: A matriz da trasformação é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Ache a matriz que representa a projeção ortogonal no plano π.

Resposta: A matriz é
$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(d) Quais são os autovalores da matriz do item (a) e as multiplicidades dos mesmos?

Resposta: Os autovalores da matriz são 0 com multiplicidade 2 e 1 com multiplicidade 1.

(4) Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & c & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix},$$
onde a, b, c são números reais.

(a) Calcule o polinomio característico de A e verifique que $r_1 = c$ é autovalor de A.

Resposta: O polinomio caracteristico de A é
$$p(x) = (x - c)(x(x - c) - a^2 - b^2)$$
e portanto, $r_1 = c$ é sempre uma raíz.

(b) Verifique que se r_2 e r_3 são os outros autovalores de A, então $r_2 + r_3 = c$.

Resposta: O traço de A é a soma dos autovalores de A. Como o traço de A é $2c$, temos que
$$r_1 + r_2 + r_3 = 2c,$$
e como $r_1 = c$ obtemos $r_2 + r_3 = c$.

(c) Verifique que se r_2 e r_3 são os outros autovalores de A, então $r_2 r_3 = -(a^2 + b^2)$.

Resposta: Como r_2 e r_3 são raízes do polinomio $q(x) = x(x-c)-a^2-b^2$, que é um fator do polinomio caracteristico $p(x)$, temos que o produto $r_2 r_3$ deve ser o termo de grau zero de $q(x)$, ou seja, $-(a^2 + b^2)$.

(d) Suponhamos que $c = 2$. Quais são os valores de a, b para os quais $r_2 = 4$ é autovalor de A? Diga quais são todos os autovalores nesse caso.

Resposta: Se $c = 2$, temos pelo item b que $r_2 + r_3 = 2$, e se $r_2 = 4$, temos $r_3 = -2$. Pelo item (c), $r_2 r_3 = 4(-2) =$

$-8 = -(a^2 + b^2)$, e portanto, os valores de a e b para os quais $r_2 = 4$ são $a^2 + b^2 = 8$.

(e) Assumindo que $c = 2$, $a = 2$, $b \geq 0$, e que $r_2 = 4$ é autovalor de A, ache uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

Resposta: Temos as mesmas condições do item (d), e além disso, $a = 2$, $b \geq 0$. Se $a = 2$, pelo item (d) temos $b^2 = 8 - 4 = 4$, o que implica que $b = 2$. A matriz A é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são $2, 4, -2$, uma base de autovetores é $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, -1)$, e uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal pode ser obtida tomando como colunas os vetores unitários nas direções de v_1, v_2, v_3. Por exemplo,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$