P4 de Álgebra Linear I – 2003.1
Data: 7 de julho de 2003.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b		x	
1.c	x		
1.d	x		
1.e	x		
1.f		x	
1.g		x	
1.h	x		
1.i		x	
1.j		x	
1.k		x	

1.a) Considere as retas de equações paramétricas

$r = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$ e $s = (q_1 + tw_1, q_2 + tw_2, q_3 + tw_3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Suponha que

$$(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3) = 0.$$

Então as retas r e s se interceptam em um ponto.

Falso: Com as hipóteses do enunciado, as retas r e s podem ser paralelas e diferentes (por tanto, não se interceptam). Por exemplo, considere as retas (paralelas) $r\colon (1,t,0)$ e $s\colon (0,t,0)$, e veja que não se interceptam (de fato, a distância entre as retas r e s é 1). Fazendo $p=(1,0,0)$, $q=(0,0,0)$, $v=(0,1,0)$ e $w=(0,1,0)$, temos $(q-p)\cdot(v\times w)=0$.

1.b) Seja A uma matriz 3×3 cujo polinômio caraterístico é

$$p(\lambda)=(\lambda-1)^2\,(3-\lambda).$$

Então A não é diagonalizável.

Falso: Considere a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

que é diagonalizável (ela própria é diagonal!) e tem o polinômio característico pedido.

1.c) Seja A uma matriz 3×3 tal que para todo par de vetores u e v de $\mathbb{R}^3$ se verifica

$$A(u)\cdot A(v)=u\cdot v.$$

Então 1 ou -1 é um autovalor de A.

Verdadeiro: Como é uma matriz 3×3, seu polinômio característico tem grau 3, logo tem no mínimo uma raiz real. Seja λ tal raiz, que é necessariamente um autovalor de A, e considere um autovetor u de λ. Por hipótese,

$$u\cdot u=A(u)\cdot A(u)=\lambda^2(u\cdot u),$$

logo $\lambda^2=1$, isto é, λ deve ser 1 ou -1.

1.d) Seja A uma matriz 2×2 ortogonal e simétrica de determinante -1. Então A representa um espelhamento.

Verdadeiro: Como a matriz é simétrica seus autovalores são reais, e como é ortogonal os autovalores têm módulo igual a 1. Logo as possibilidades são

1 autovalor de multiplicidade dois, -1 autovalor de multiplicidade dois, e 1 e -1 autovalores simples. Nos dois primeiros casos o determinante é 1. Portanto, estamos no último caso, que representa um espelhamento na reta que contém a origem e cujo vetor diretor é o autovetor associado a 1.

1.e) Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e existem autovetores u e w de A tais que $Au = 3u$ e $Aw = -w$, então a soma dos autovalores de A^4 é igual a 82.

Verdadeiro: Temos

$$A^4(u) = A^3(3u) = 3A^3(u) = 3^2A^2(u) = 3^3A(u) = 3^4u = 81u.$$

Portanto, u é um autovetor de A cujo autovalor é 81. Também temos,

$$A^4(w) = A^3(-w) = -A^3(w) = A^2(w) = -A(w) = w.$$

Portanto, w é um autovetor de A^4 cujo autovalor é 1. Portanto, os autovalores de A^4 são 81 e 1, e $81 + 1 = 82$.

1.f) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são 2, 6 e 3.

Falso: O traço de A é 16, que é igual a soma dos autovalores de A, mas $16 \neq 2 + 6 + 3$.

1.g) A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável.

Falso: A matriz A é simétrica, portanto diagonalizável.

1.h) As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 222222 & 0 & 0 \\ 222222 & 333333 & 0 \\ 222222 & 333333 & 444444 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 444444 & 0 & 0 \\ 444444 & 222222 & 0 \\ 444444 & 333333 & 333333 \end{pmatrix}$$

são semelhantes.

Verdadeiro: Como as matrizes são triangulares, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, ou seja, 444444, 222222 e 333333. Como todos os autovalores são diferentes, as matrizes são diagonalizáveis e têm a mesma forma diagonal, por exemplo,

$$D = \begin{pmatrix} 444444 & 0 & 0 \\ 0 & 222222 & 0 \\ 0 & 0 & 333333 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$A = PDP^{-1}, \quad B = QDQ^{-1}, \quad D = Q^{-1}BQ,$$

logo

$$A = P(Q^{-1}BQ)P^{-1} = (PQ^{-1})B(PQ^{-1})^{-1},$$

e as matrizes A e B são semelhantes.

1.i) Os vetores $\{(1,-1,-1),(1,0,1),(1,2,-1)\}$ formam uma base ortonormal.

Falso: Os vetores formam uma base ortogonal (os vetores são ortogonais), mas não são unitários, logo a base não é ortonormal.

1.j) Seja A uma matriz inversível 3×3 cujo traço é 5. Então o traço de A^{-1} é $1/5$.

Falso: Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cujo traço é 2.

1.k) Seja A uma matriz 2×2 tal que A^2 é a matriz nula, então A é a matriz nula.

Falso: Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Considere o plano $\pi\colon x - y - z = 0$, o ponto $p = (1, 0, 2)$ e as retas $r_1 = (2t, 1, t)$ e $r_2 = (1 + t, 1 - t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Determine:

(2.a) Uma equação paramétrica da reta r que contém o ponto p e é perpendicular a π.

(2.b) A equação cartesiana do plano rho que contém o ponto p e é paralelo a r_1 e r_2.

(2.c) A distância entre as retas r_1 e r_2.

(2.d) A posição relativa das retas r_1 e r_2.

(2.e) A posição relativa da reta r_2 e o plano π.

Resposta:

(a) O vetor diretor da reta r é o vetor normal do plano π, ou seja, o vetor $(1, -1, -1)$, por tanto, uma equação paramétrica de r é

$$r\colon (1 + t, 0 - t, 2 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Como o plano ρ é paralelo às retas r_1 e r_2, seu vetor normal é paralelo a

$$(2, 0, 1) \times (1, -1, 2) = (1, -3, -2).$$

Logo a equação cartesiana de ρ é da forma

$$x - 3y - 2z = d,$$

onde d é determinado pela condição $p = (1, 0, 2) \in \rho$, ou seja,

$$1(1) - 3(0) - 2(2) = d = -3$$

Portanto,

$$\rho\colon x - 3y - 2z = -3.$$

(c) e **(d)** Como os vetores diretores das retas não são paralelos, as retas ou são reversas (em tal caso, a distância entre as retas é maior do que zero) ou se interceptam em um ponto (em tal caso, a distância entre as retas é zero). Para calcular a distância d escolhemos pontos $P \in r_1$, $P = (0, 1, 0)$, $Q \in r_2 = (1, 1, 0)$, e os vetores diretores $v = (2, 0, 1)$ e $w = (1, -1, 2)$ de r_1 e r_2, então

$$d = \frac{|\overline{PQ} \cdot (v \times w)|}{||v \times w||}.$$

Temos (já calculado no item anterior)

$$v \times w = (1, -3, -2),$$

e

$$\overline{PQ} = (-1, 0, 0).$$

Portanto,

$$d = 1/\sqrt{14}.$$

Portanto, as retas são reversas e sua distância $1/\sqrt{14}$.

(e) O vetor normal do plano π é $(1, -1, -1)$, e o vetor diretor da reta r_2 é $(1, -1, 2)$, como

$$(1, -1, -1) \cdot (1, -1, 2) = 0,$$

o plano e a reta são paralelos. Como o ponto $(1, -1, 0)$ de r_2 não pertence ao plano π (pois $1 + 1 \neq 0$), a reta r_2 e o plano não se interceptam. Isto é, a reta e o plano são paralelos e disjuntos.

3) Considere o plano $\pi\colon x + y - z = 0$. Considere a projeção ortogonal P no plano π e a projeção Q no plano π na direção da reta $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

(3.a) Determine os autovalores de P e de Q.

(3.b) Determine bases de autovetores de P e de Q.

(3.c) Escreva P da forma $P = MDM^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.

(3.d) Escreva Q da forma $Q = NEN^{-1}$, onde E é diagonal. Determine explicitamente N.

(3.e) Estude se as matrizes de P e Q na base canônica são semelhantes.

Resposta:

(a) Em ambos os casos, os autovalores são 1 (de multiplicidade dois) e 0 (simples).

(b) Uma base de autovetores de P está formada pelo vetor normal do plano de projeção $(1, 1, -1)$ (autovetor associado a zero) e dois vetores não paralelos do plano de projeção, por exemplo $(1, 0, 1)$ e $(1, -2, -1)$ (autovetores associados a 1).

Uma base de autovetores de Q está formada pelo vetor paralelo à direção de projeção, o vetor $(1, 1, 0)$ (autovetor associado a zero), e dois vetores não paralelos do plano de projeção, por exemplo $(1, 0, 1)$ e $(1, -2, -1)$ (autovetores associados a 1).

(c) As duas transformações lineares têm a mesma forma diagona, a matriz

$$D = E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escolhemos uma base β ortonormal de autovetores de P tal que a matriz de P na base β seja D,

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\}.$$

Portanto, a matriz M é

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Como a matriz M é ortogonal por construção, $M^{-1} = M^t$, ou seja

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

(d) Escolhemos uma base γ de autovetores de Q tal que a matriz de Q na base γ seja D,

$$\gamma = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,-2,-1)\}.$$

Portanto, a matriz N é

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) As transformações lineares P e Q têm a mesma forma diagonal, portanto suas matrizes na base canônica são semelhantes. Mais precisamente, como $E = D$, temos

$$P = MDM^{-1}, \qquad Q = NDN^{-1}, \qquad D = N^{-1}QN,$$

ou seja,

$$P = M(N^{-1}QN)M^{-1} = (MN^{-1})Q(NM^{-1}) = (MN^{-1})Q(MN^{-1})^{-1},$$

e as matrizes são semelhantes.

4) Seja M uma transformação linear tal que sua matriz $[M]$ na base canônica é uma matriz simétrica tal que

- o traço de $[M]$ é 3,
- o determinante de $[M]$ é nulo, e
- 1 é um autovalor de $[M]$.

(4.a) Determine os autovalores de M.

(4.b) Sabendo que $M(1,1,1) = (1,1,1)$ e que todo vetor não nulo do plano $\pi\colon x + y - 2z = 0$ é transformado em um vetor não nulo de π por M, determine uma base de autovetores de M.

(4.c) Encontre uma projeção ortogonal P em uma reta tal que $P \circ M$ seja a transformação linear nula.

Resposta:

(a) Sejam λ, σ e 1 os autovalores de M. Como o determinante de M é nulo e é igual ao produto dos autovalores de M, um autovalor de M é necessariamente nulo (digamos $\sigma = 0$). Como o traço é a soma dos autovalores,

$$3 = \lambda + 0 + 1, \quad \lambda = 2.$$

Portanto, os autovalores de M são 1, 2 e 0.

(b) Como o plano $x + y - 2z = 0$ é invariante, dois vetores paralelos ao plano devem ser autovetores, como $(1,1,1)$ é um autovetor e está no plano, e autovetores associados a autovalores diferentes de uma matriz simétrica são ortogonais, um autovetor de M deve ser paralelo a $x+y-2z = 0$ e ortogonal a $(1,1,1)$, logo é paralelo a $(1,1,-2) \times (1,1,1) = (-3,3,0)$. Finalmente, como a matriz é simétrica, o autovetor da base que falta é o vetor normal do plano $(1,1,-2)$. Logo uma base de autovetores de M é

$$\beta = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,1,-2)\}.$$

Veja que os autovetores da base β estão associados a 1, 2 e 0 (respetivamente): o segundo vetor da base não pode estar associado a 0, pois por hipótese, vetores não nulos do plano π se transformam em vetores não nulos.

(c) A projeção ortogonal P na reta $(t, t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Para ver que $P \circ M$ é a transformação linear nula é suficiente ver que aplicando $P \circ M$ aos vetores da base β obtemos o vetor nulo. Observe que $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$ são ortogonais à reta de projeção, portanto $P(1,1,1) = P(1,-1,0) = (0,0,0)$. Logo temos

$$\begin{aligned}
P \circ M(1,1,1) &= P(1,1,1) = (0,0,0) \\
P \circ M(-1,1,0) &= P(-2,2,0) = (0,0,0), \\
P \circ M(1,1,-2) &= P(0,0,0) = (0,0,0),
\end{aligned}$$

que prova a nossa afirmação.