(1) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ache os autovalores de $A$.
(b) Ache uma base de autovetores ortogonais de $A$ caso exista.
(c) Existe uma matriz $B$ tal que $B^{-1}AB$ é uma matriz diagonal? Caso afirmativo, escreva a matriz $B$.
(d) Ache a inversa da matriz $B$ do item anterior.
(e) Calcule $A^5$.

**Não precisa justificar as respostas.**
**Escreva suas respostas nos espaços a seguir a caneta.**

**a:** Os autovalores de $A$ são 0 e 10.

**b:** Uma base ortogonal de vetores existe porque $A$ é simétrica. Uma delas é

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$
$$v_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

O vetor $v_1$ satisfaz $A(v_1) = 0$, e o vetor $v_2$ satisfaz $A(v_2) = 10v_2$.

**c:** A matriz $B$ existe porque $A$ é simétrica. Um exemplo é

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

A forma diagonal da matriz $A$ na base associada a $B$ é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

**d:** A inversa de $B$ é sua trasposta, porque $B$ é ortogonal.

**e:** $A^5$ pode ser calculado pelo produto

$$BD^5B^{-1} = 10^4 \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

o que é igual a $10^4 A$.

(2) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(a) A matriz $M$ representa um espelhamento, uma rotação, uma projeção ortogonal, ou nenhuma das anteriores? **Justificar sua resposta**.
(b) Caso $M$ seja espelhamento ou projeção, escreva a equação do plano ou reta no qual se faz o espelhamento ou a projeção.
(c) Se $P$ é uma matriz ortogonal, diga se a transformação linear $P^{-1}MP$ é um espelhamento, uma rotação, uma projeção ortogonal ou nenhuma das anteriores.
(d) Quál é o determinante de $M$?

**Não precisa justificar as respostas dos itens b, c, d. Escreva suas respostas nos espaços a seguir a caneta**.

**a:** A matriz representa um espelhamento porque é uma matriz simétrica o ortogonal.

**b:** Observamos que o traço da matriz $M$ é $-1$, e como seus autovalores so podem ser 1 ou $-1$ com multiplicidade, concluimos que 1 é autovalor de $M$ com multiplicidade 1 e que $-1$ é autovalor com multiplicidade 2. Portanto, $M$ representa um espelhamento com relação a uma reta. A reta é gerada por um autovetor associado ao autovalor 1, por exemplo $v = (2, 1, 1)$. Uma equação paramétrica da reta é $r(t) = t(2, 1, 1)$.

**c:** A matriz $P^{-1}MP$ é um espelhamento, porque $M$ é espelhamento, e $P^{-1}MP$ continua sendo ortogonal e simétrica.

**d:** O determinante de $M$ é o produto dos autovalores, $1 \times (-1) \times (-1) = 1$.

(3) Seja $A$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(a) A matriz $A$ representa uma rotação, **justifique**.

(b) Ache o eixo da rotação $A$.
(c) Ache um autovalor complexo da matriz $A$.

**Não precisa justificar as respostas dos itens b, c. Escreva as respostas a caneta.**

**a:** A matriz $A$ representa uma rotação porque é uma matriz ortogonal (as linhas são ortogonais entre sim e tem norma 1) que não é simétrica.

**b:** O eixo da rotação é uma reta gerada por um autovetor do autovalor 1. Por exemplo,

$$v = (\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}), \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, 1)$$

é um autovetor associado a 1.

**c:** Um autovalor complexo da matriz $A$ pode ser calculado usando o traço da matriz, que é igual a $(\sqrt{5}-8)/3\sqrt{5}$. O coseno do ângulo de rotação de $A$ é portanto,

$$cos(\alpha) = \frac{1}{2}(tr(A) - 1) = -\frac{1}{3}(1 + \frac{4}{\sqrt{5}}).$$

De forma tal que um autovalor complexo é

$$\lambda = -\frac{1}{3}(1 + \frac{4}{\sqrt{5}}) + i\frac{2}{15}\sqrt{51 - \sqrt{5}}.$$

(4) Considere a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Escreva o polinomio caracteristico de $N$.
(b) Ache os autovalores de $N$.
(c) Caso $\lambda = 1$ seja autovalor de $N$, ache todos os autovetores associados a $\lambda = 1$.
(d) Existe uma matriz inversivel $B$ tal que $B^{-1}NB$ é diagonal? **Justifique sua resposta**.
(e) Existe uma matriz ortogonal $P$ tal que $P^{-1}NP$ é diagonal? **Justifique sua resposta**.

**Não precisa justificar as respostas dos itens a, b, c. Escreva as respostas a caneta**.

**a:** O polinomio é $p(x) = (x-1)^2(x-2)$.

**b:** Os autovalores de $N$ são as raizes de $p(x)$, ou seja $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade 2 e $\lambda_2 = 2$ com multiplicidade 1.

**c:** O conjunto dos autovetores associados ao autovalor 1 é a reta gerada pelo vetor $v = (0, 1, 6)$.

**d:** Não existe matriz que diagonalize $N$. Porque se $N$ fosse diagonalizável haveria uma base de $\mathbb{R}^3$ de autovetores de $N$ o que é impossível pelos itens (b) e (c). Com efeito, pelo item (b), os autovalores de $N$ são 1 e 2, e pelo item (c), cada um deles possui uma reta de autovetores em $\mathbb{R}^3$. Mas dois vetores em $\mathbb{R}^3$ nunca são uma base de $\mathbb{R}^3$.

**e:** Não existe matriz que diagonalize $N$, ortogonal ou não.