(1) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ache os autovalores de A.
(b) Ache uma base de autovetores ortogonais de A caso exista.
(c) Existe uma matriz B tal que $B^{-1}AB$ é uma matriz diagonal? Caso afirmativo, escreva a matriz B.
(d) Ache a inversa da matriz B do item anterior.
(e) Calcule A^5.

Não precisa justificar as respostas.
Escreva suas respostas nos espaços a seguir a caneta.

a: Os autovalores de A são 0 e 10.

b: Uma base ortogonal de vetores existe porque A é simétrica. Uma delas é

$$v_1 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}),$$
$$v_2 = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}).$$

O vetor v_1 satisfaz $A(v_1) = 0$, e o vetor v_2 satisfaz $A(v_2) = 10v_2$.

c: A matriz B existe porque A é simétrica. Um exemplo é

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

A forma diagonal da matriz A na base associada a B é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

d: A inversa de B é sua trasposta, porque B é ortogonal.

e: A^5 pode ser calculado pelo produto

$$BD^5B^{-1} = 10^4 \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

o que é igual a $10^4 A$.

(2) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(a) A matriz M representa um espelhamento, uma rotação, uma projeção ortogonal, ou nenhuma das anteriores? **Justificar sua resposta**.
(b) Caso M seja espelhamento ou projeção, escreva a equação do plano ou reta no qual se faz o espelhamento ou a projeção.
(c) Se P é uma matriz ortogonal, diga se a transformação linear $P^{-1}MP$ é um espelhamento, uma rotação, uma projeção ortogonal ou nenhuma das anteriores.
(d) Quál é o determinante de M?

Não precisa justificar as respostas dos itens b, c, d. Escreva suas respostas nos espaços a seguir a caneta.

a: A matriz representa um espelhamento porque é uma matriz simétrica o ortogonal.

b: Observamos que o traço da matriz M é -1, e como seus autovalores so podem ser 1 ou -1 com multiplicidade, concluimos que 1 é autovalor de M com multiplicidade 1 e que -1 é autovalor com multiplicidade 2. Portanto, M representa um espelhamento com relação a uma reta. A reta é gerada por um autovetor associado ao autovalor 1, por exemplo $v = (2, 1, 1)$. Uma equação paramétrica da reta é $r(t) = t(2, 1, 1)$.

c: A matriz $P^{-1}MP$ é um espelhamento, porque M é espelhamento, e $P^{-1}MP$ continua sendo ortogonal e simétrica.

d: O determinante de M é o produto dos autovalores, $1 \times (-1) \times (-1) = 1$.

(3) Seja A a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(a) A matriz A representa uma rotação, **justifique**.

(b) Ache o eixo da rotação A.
(c) Ache um autovalor complexo da matriz A.

Não precisa justificar as respostas dos itens b, c. Escreva as respostas a caneta.

a: A matriz A representa uma rotação porque é uma matriz ortogonal (as linhas são ortogonais entre sim e tem norma 1) que não é simétrica.

b: O eixo da rotação é uma reta gerada por um autovetor do autovalor 1. Por exemplo,

$$v = (\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}), \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, 1)$$

é um autovetor associado a 1.

c: Um autovalor complexo da matriz A pode ser calculado usando o traço da matriz, que é igual a $(\sqrt{5}-8)/3\sqrt{5}$. O coseno do ángulo de rotação de A é portanto,

$$cos(\alpha) = \frac{1}{2}(tr(A) - 1) = -\frac{1}{3}(1 + \frac{4}{\sqrt{5}}).$$

De forma tal que um autovalor complexo é

$$\lambda = -\frac{1}{3}(1 + \frac{4}{\sqrt{5}}) + i\frac{2}{15}\sqrt{51 - \sqrt{5}}.$$

(4) Considere a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Escreva o polinomio caracteristico de N.
(b) Ache os autovalores de N.
(c) Caso $\lambda = 1$ seja autovalor de N, ache todos os autovetores associados a $\lambda = 1$.
(d) Existe uma matriz inversivel B tal que $B^{-1}NB$ é diagonal? **Justifique sua resposta**.
(e) Existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}NP$ é diagonal? **Justifique sua resposta**.

Não precisa justificar as respostas dos itens a, b, c. Escreva as respostas a caneta.

a: O polinomio é $p(x) = (x-1)^2(x-2)$.

b: Os autovalores de N são as raizes de $p(x)$, ou seja $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade 2 e $\lambda_2 = 2$ com multiplicidade 1.

c: O conjunto dos autovetores associados ao autovalor 1 é a reta gerada pelo vetor $v = (0, 1, 6)$.

d: Não existe matriz que diagonalize N. Porque se N fosse diagonalizável haveria uma base de $\mathbb{R}^3$ de autovetores de N o que é impossível pelos itens (b) e (c). Com efeito, pelo item (b), os autovalores de N são 1 e 2, e pelo item (c), cada um deles possui uma reta de autovetores em $\mathbb{R}^3$. Mas dois vetores em $\mathbb{R}^3$ nunca são uma base de $\mathbb{R}^3$.

e: Não existe matriz que diagonalize N, ortogonal ou não.