P3 de Álgebra Linear I – 2003.2
Gabaritos
Data: 17 de novembro 2003

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta.

Tabela de respostas:

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b		x	
1.c	x		
1.d		x	
1.e	x		

1.a) Existe uma matriz M, 3×3, ortogonal e simétrica cujo traço é igual a dois.

Resposta: Falsa. Como a matriz é simétrica, seus autovalores são números reais. Como é ortogonal, seus autovalores têm módulo 1. Portanto, os autovalores de M são 1 ou -1. Há as seguintes possibilidades:

- autovalor 1 de multiplicidade 3, então M tem traço $1 + 1 + 1 = 3$;

- autovalor 1 de multiplicidade 2 e autovalor -1 de multiplicidade 1, então M tem traço $1+1-1=1$;
- autovalor 1 de multiplicidade 1 e autovalor -1 de multiplicidade 2, então M tem traço $1-1-1=-1$;
- autovalor -1 de multiplicidade 3, então M tem traço $-1-1-1=-3$.

Portanto, o traço não pode ser 2.

1.b) Considere as matrizes

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Defina a matriz M como

$$M = P\,D\,P^{-1}.$$

A matriz M é simétrica.

Resposta: Falsa. Os autovetores de M são paralelos aos vetores coluna de P, de forma mais precisa:

- os autovetores associados a 1 são paralelos a $(1,1,1)$,
- os autovetores associados a 1 são paralelos a $(1,2,3)$,
- os autovetores associados a 3 são paralelos a $(1,2,4)$.

Como os vetores $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ e $(1,2,4)$ não são ortogonais, M não possui uma base ortogonal de autovetores, portanto, M não é simétrica.

1.c) Sejam $\beta = \{u, v\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e $[M]$ e $[N]$ as matrizes na base canônica das transformações lineares M, $N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verificam

$$\begin{aligned} M(u) &= 5\,u, & \qquad M(v) &= 7\,v \\ N(u) &= \bar{0}, & \qquad N(v) &= 3\,v. \end{aligned}$$

As matrizes produto $[N][M]$ e $[M][N]$ são iguais e simétricas.

Resposta: Verdadeira. Seja P a matriz ortogonal cujas colunas são os vetores u e v. Então se verifica:

$$[M] = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}, \qquad [N] = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Portanto,

$$[M][N] = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Analogamente,

$$[N][M] = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Portanto, os produtos são iguais. O fato da matriz produto ser simétrica decorre de P ser ortogonal (o produto é ortogonalmente diagonalizável).

1.d) Seja E um espelhamento em um plano de $\mathbb{R}^3$. Existe uma base β tal que a matriz de E na base β é

$$[E]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Falsa. Se a resposta fosse afirmativa, a matriz $[E]_\beta$ deveria ser semelhante à matriz

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é uma forma diagonal do espelhamento. Portanto, a matriz $[E]_\beta$ deveria ser diagonalizável, mas isto é falso: para o autovalor 1 de multiplicidade dois de $[E]_\beta$ somente é possível encontar um autovetor l.i. (paralelos ao vetor $(0, 1, 0)$).

1.e) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 111 & 1111 \\ 33 & 333 & 3333 \\ 77 & 777 & 7777 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de M são 0 (de multiplicidade dois) e 8121.

Resposta: Verdadeira. O determinante de M é zero (todas as linhas são paralelas). Portanto 0 é um autovalor. Os autovetores associados a 0 geram o plano $11x+111y+1111z=0$. Portanto, o autovalor 0 tem dois autovetores l.i. e, portanto, sua multiplicidade é no mínimo dois. Se fosse 3 o traço da matriz seria zero (absurdo). Portanto, sua multiplicidade é dois. Seja λ o outro autovalor. Temos

$$\text{traço}(M) = 0 + 0 + \lambda = \lambda = 11 + 333 + 7777 = 8121,$$

o que prova a afirmação.

Segunda questão

Prova tipo A

2) Considere os vetores

$$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad v = (1/\sqrt{2}, 0, a), \quad w = (1/\sqrt{6}, b, c).$$

(2.a) Determine a, b, c para que os vetores u, v, w formem uma base ortonormal.

(2.b) Considere agora a base $\beta = \{u, v, w\}$ do item anterior. Determine a primeira coordenada do vetor $(3, 2, 3)$ na base β.

Resposta:

a) $a = -1/\sqrt{2}, \quad b = -2/\sqrt{6}, \quad c = 1/\sqrt{6}.$

b) primeira coordenada $= 8/\sqrt{3}$.

Prova tipo B

2) Considere os vetores

$$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad v = (-1/\sqrt{6}, a, -1/\sqrt{6}), \quad w = (1/\sqrt{2}, b, c).$$

(2.a) Determine a, b, c para que os vetores u, v, w formem uma base ortonormal.

(2.b) Considere agora a base $\beta = \{u, v, w\}$ do item anterior. Determine a segunda coordenada do vetor $(3, 2, 3)$ na base β.

Resposta:

a) $a = 2/\sqrt{6}, \quad b = 0, \quad c = -1/\sqrt{2}.$

b) segunda coordenada $= -2/\sqrt{6}$.

Prova tipo C

2) Considere os vetores

$$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad v = (a, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad w = (2/\sqrt{6}, b, c).$$

(2.a) Determine a, b, c para que os vetores u, v, w formem uma base ortonormal.

(2.b) Considere agora a base $\beta = \{u, v, w\}$ do item anterior. Determine a terceira coordenada do vetor $(3, 2, 3)$ na base β.

Resposta:

a) $a = 0, \quad b = -1/\sqrt{6}, \quad c = -1/\sqrt{6}.$

b) terceira coordenada $= 1/\sqrt{6}$.

Prova tipo D

2) Considere os vetores

$$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad v = (-1/\sqrt{6}, a, b), \quad w = (-1/\sqrt{2}, 0, c).$$

(2.a) Determine a, b, c para que os vetores u, v, w formem uma base ortonormal.

(2.b) Considere agora a base $\beta = \{u, v, w\}$ do item anterior. Determine a primeira coordenada do vetor $(3, 2, 3)$ na base β.

Resposta:

a) $a = 2/\sqrt{6}, \quad b = -1/\sqrt{6}, \quad c = 1/\sqrt{2}$.

b) primeira coordenada $= 8/\sqrt{3}$.

---

3) Considere a transformação linear

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(u) = (1, 0, -1) \times u$$

e a base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}); (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\}.$$

(3.a) Determine a matriz de T na base β.

(3.b) Determine os autovalores de T.

(3.c) Interprete T como a composição de uma projeção ortogonal, uma rotação e a multiplicação por um escalar (determinando o plano/reta de projeção e o eixo e o ângulo de rotação).

Resposta: Escrevemos,

$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); \quad v = (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}); \quad w = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}).$

Observe que

$$\begin{aligned}
T(u) \quad &= T(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = (1/\sqrt{3})\,((1,0,-1)\times(1,1,1)) = \\
&= (1/\sqrt{3})\,(1,-2,1) = \\
&= \sqrt{2}\,(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) = \sqrt{2}\,v;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(v) \quad &= T(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) = (1/\sqrt{6})\,((1,0,-1)\times(1,-2,1)) = \\
&= (2/\sqrt{6})\,(-1,1,-1) = \\
&= -\sqrt{2}\,(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = -\sqrt{2}\,u;
\end{aligned}$$

$$T(w) \quad = T(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2})\,((1,0,-1)\times(1,0,-1)) = \bar{0}.$$

Portanto, a matriz de T na base β é:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar os autovalores de T podemos usar a matriz de T na base β (lembre que matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores). O polinômio característico de T é

$$p(\lambda) = -\lambda\,(\lambda^2 + 2).$$

Logo as raizes (que são os autovalores de T) são

$$0, \quad \sqrt{2}\,\mathrm{i}, \quad -\sqrt{2}\,\mathrm{i}$$

Finalmente, na base β temos

$$\begin{aligned}
[T]_\beta \quad &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

As matrizes acima representam (na base β) respetivamente (de esquerda à direita):

- a projeção ortogonal no plano $x - z = 0$,
- uma rotação de eixo $(t, 0, -t)$ e ângulo $\pi/2$
- uma multiplicação por $\sqrt{2}$.

Quarta questão

Prova tipo A

4) Considere a matriz M dada por

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 2 é um autovalor e que $(1, 1, 1)$ é um autovetor de M:

(4.a) Determine os autovalores de M.

(4.b) Determine uma base β ortogonal de autovetores de M.

(4.c) Determine duas formas diagonais D e E diferentes de M.

Resposta:

4.a) autovalores: 2 (multiplicidade 2) e 8 (simples ou multiplicidade 1).

4.b) base ortogonal de autovetores

$$\beta = \{(1, -1, 0), (1, 1, -2), (1, 1, 1)\}.$$

4.c) formas diagonais:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prova tipo B

4) Considere a matriz M dada por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 3 é um autovalor e que $(1,1,-1)$ é um autovetor de M:

(4.a) Determine os autovalores de M.

(4.b) Determine uma base β ortogonal de autovetores de M.

(4.c) Determine duas formas diagonais D e E diferentes de M.

Resposta:

4.a) autovalores: 3 (multiplicidade 2) e -3 (simples ou multiplicidade 1).

4.b) base ortogonal de autovetores

$$\beta = \{(1,0,1), (-1,2,1), (1,1,-1)\}.$$

4.c) formas diagonais:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prova tipo C

4) Considere a matriz M dada por

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 3 é um autovalor e que $(1,1,1)$ é um autovetor de M:

(4.a) Determine os autovalores de M.

(4.b) Determine uma base β ortogonal de autovetores de M.

(4.c) Determine duas formas diagonais D e E diferentes de M.

Resposta:

4.a) autovalores: 3 (multiplicidade 2) e 0 (simples ou multiplicidade 1).

4.b) base ortogonal de autovetores

$$\beta = \{(1,1,1), (1,0,-1), (1,-2,1)\}.$$

4.c) formas diagonais:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prova tipo D

4) Considere a matriz M dada por

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 3 é um autovalor e que $(1,2,-1)$ é uma autovetor de M:

(4.a) Determine os autovalores de M.

(4.b) Determine uma base β ortogonal de autovetores de M.

(4.c) Determine duas formas diagonais D e E diferentes de M.

Resposta:

4.a) autovalores: 3 (multiplicidade 2) e -3 (simples ou multiplicidade 1).

4.b) base ortogonal de autovetores

$$\beta = \{(1, 2, -1), (1, 0, 1), (1, -1, -1)\}.$$

4.c) formas diagonais:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quinta questão

Complete os quadros abaixo. Não é necessário justificar

Prova tipo A

Seja R uma matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ de eixo $(t, 75t, 48t)$, $t \in \mathbb{R}$, e ângulo $\pi/4$ radianos e considere a matriz $[R]$ de R na base canônica.

	Sim	**Não**
$[R]$ é simétrica		x
$[R]$ é ortogonal	x	

O traço de $[R]$ é	$1+\sqrt{2}$
O determinante de $[R]$ é	1

Seja P uma projeção de $\mathbb{R}^3$ no plano $3x+7y+50z=0$ na direção do vetor $(1,1,1)$. Considere a matriz $[P]$ de P na base canônica.

	Sim	**Não**
$[P]$ é simétrica		x
$[P]$ é ortogonal		x

O traço de $[P]$ é	2
O determinante de $[P]$ é	0

Prova tipo B

Seja R uma matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ de eixo $(77t, 19t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, e ângulo $\pi/3$ radianos e considere a matriz $[R]$ de R na base canônica.

	Sim	**Não**
$[R]$ é simétrica		x
$[R]$ é ortogonal	x	

O traço de $[R]$ é	2
O determinante de $[R]$ é	1

Seja P uma projeção de $\mathbb{R}^3$ na reta $(t, 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, na direção do plano $3x+7y+50z=0$. Considere a matriz $[P]$ de P na base canônica.

	Sim	**Não**
$[P]$ é simétrica		x
$[P]$ é ortogonal		x

O traço de $[P]$ é	1
O determinante de $[P]$ é	0

Prova tipo C

Seja R uma matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ de eixo $(14t, 75t, 48t)$, $t \in \mathbb{R}$, e ângulo $\pi/6$ radianos e considere a matriz $[R]$ de R na base canônica.

	Sim	**Não**
$[R]$ é simétrica		x
$[R]$ é ortogonal	x	

O traço de $[R]$ é	$1+\sqrt{3}$
O determinante de $[R]$ é	1

Seja P uma projeção de $\mathbb{R}^3$ no plano $3x + 29y + 50z = 0$ na direção do vetor $(1, 2, 2)$. Considere a matriz $[P]$ de P na base canônica.

	Sim	**Não**
$[P]$ é simétrica		x
$[P]$ é ortogonal		x

O traço de $[P]$ é	2
O determinante de $[P]$ é	0

Prova tipo D

Seja R uma matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ de eixo $(17t, t, 52t)$, $t \in \mathbb{R}$, e ângulo $\pi/4$ radianos e considere a matriz $[R]$ de R na base canônica.

	Sim	**Não**
$[R]$ é simétrica		x
$[R]$ é ortogonal	x	

O traço de $[R]$ é	$1+\sqrt{2}$
O determinante de $[R]$ é	1

Seja P uma projeção de $\mathbb{R}^3$ na reta $(19t, 16t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, na direção do plano $13x + 12y + 17z = 0$. Considere a matriz $[P]$ de P na base canônica.

	Sim	**Não**
$[P]$ é simétrica		x
$[P]$ é ortogonal		x

O traço de $[P]$ é	1
O determinante de $[P]$ é	0

---

6) Escolha quais das afirmações a seguir é a verdadeira.

6.1) A matriz A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

representa:

$\boxed{\textbf{Uma rotação de ângulo } \pi/4 \textbf{ e eixo de rotação a reta } (t,-t,-2t)\textbf{, } t \in \mathbb{R}}$

6.2) A matriz S

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

representa:

$\boxed{\textbf{A projeção no plano } x+y+z=0 \textbf{ na direção do vetor } (1,0,1)}$

Tabela de respostas:

	6.1	**6.2**
prova A	g	d
prova B	e	b
prova C	c	i
prova D	a	g