P3 de Álgebra Linear I – 2012.1

16 de junho de 2012.

Gabarito

1) Seja A uma matriz 3×3 com polinômio característico

$$p(\lambda) = \det\big(A - \lambda\, Id\big) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

a) Calcule o determinante de A e o traço de A.

b) Considere a matriz $B = A^3$. Determine o traço de B.

c) Determine se a matriz A possui inversa. Em caso afirmativo determine o traço de A^{-1} (a matriz inversa de A).

Suponha agora que a matriz A é da forma

$$A = P\, D\, P^t,$$

onde D é uma matriz diagonal e P é uma matriz ortogonal.

d) Sabendo que o vetor $(1,1,1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 1, encontre (se possível) uma base ortonormal β formada por autovetores de A.

e) Determine explicitamente as matrizes P e D.

Resposta:

a) Os autovalores de A são as raízes de $p(\lambda)$ e suas multiplicidades as multiplicidades como raízes. Portanto os autovalores de A são 1 (simples) e 2 duplo.

O determinante de A, $\det(A)$, é o produto dos autovalores contados com multiplicidade,

$$\det(A) = 1 \cdot (2) \cdot (2) = 4.$$

O traço de A, $\operatorname{tr}(A)$, é a soma dos autovalores contados com multiplicidade,

$$\operatorname{tr}(A) = 1 + (2) + (2) = 5.$$

b) Observe que se $A(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$ então $B(\overrightarrow{v}) = \lambda^3 \overrightarrow{v}$. Portanto, se λ é um autovalor de A temos que λ^3 é um autovalor de B. Logo $1 = 1^3$ e $8 = 2^3$ são autovalores de B. Como

$$\det(B) = \det(A^3) = \det(A)^3 = 5^3 = 4^3 = 64$$

e este determinante é o produto dos autovalores de B temos que o terceiro autovalor σ de B verifica

$$\det(B) = 64 = 1\,(8)\,\sigma, \quad \sigma = 8.$$

Portanto os autovalores de B são $1^3 = 1$ e $2^3 = 8$, o último com multiplicidade dois. Logo

$$\operatorname{tr}(B) = 1 + (8) + (8) = 17.$$

c) O determinante de A é diferente de 0. Portanto A possui inversa. Observamos também que se $A(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$ então $\lambda \neq 0$ e $A^{-1}(\overrightarrow{v}) = \lambda^{-1} \overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{v} = A^{-1}\, A(\overrightarrow{v}) = A^{-1}(\lambda\, \overrightarrow{v}) = \lambda\, A^{-1}(\overrightarrow{v}), \quad A^{-1}(\overrightarrow{v}) = \lambda^{-1} \overrightarrow{v}.$$

Logo os autovalores de A^{-1} são 1 e $1/2$. Como no item anterior as multiplicidade de 1 é um e a multiplicidade de $1/2$ é dois. Portanto,

$$\operatorname{tr}(A^{-1}) = 1 + 1/2 + 1/2 = 2.$$

d) A matriz A possui uma base ortogonal de autovetores (exatamente os colunas da matriz P). Portanto os autovetores associados a 2 são perpendiculares aos autovetores associados a 1. Portanto pertencem ao plano $x + y + z = 0$. Um autovetor associado a 2 é $(1, -1, 0)$. Um autovetor associado a 2 é ortogonal a $(1, -1, 0)$ e $(1, 1, 1)$ é

$$\bar{u} = (1, -1, 0) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2).$$

Portanto, uma base ortonormal β formada por autovetores de A é

$$\left\{ \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right), \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\right), \left(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\right) \right\}.$$

e) Pelo item anterior temos que P é uma matriz ortogonal cujas colunas são autovetores de A e D é a matriz diagonal formada pelos autovalores correspondentes (cuidado com a ordem!). Portanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e observe que $(1, 1, 1)$ é um autovetor de A.

(a) Determine todos os autovalores de A.

(b) Determine (se possível) uma base ortonormal de autovetores de A.

(c) Determine explicitamente matrizes D, P e P^{-1} tais que

$$A = P\,D\,P^{-1},$$

onde D é uma matriz diagonal.

Resposta:

a) Observamos que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo 0 é um autovalor de A.

O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)\Big((2-\lambda)^2 - 1\Big) + \\ &+ \Big(-2+\lambda-1\Big) - \Big(1+2-\lambda\Big) \\ &= (2-\lambda)\,(3-4\lambda+\lambda^2) - 6 + 2\,\lambda \\ &= \lambda^3 + 4\,\lambda^2 - 11\,\lambda + 6 - 6 + 2\,\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 6\,\lambda^2 - 9\,\lambda = \\ &= -\lambda\,\Big(\lambda^2 - 6\,\lambda + 9\Big). \end{aligned}$$

Logo as raízes do polinômio são $\lambda = 0$ e

$$\frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2}, \quad \lambda = 3.$$

Logo os autovalores são 0 e 3 (duplo).

b) Como A é simétrica é diagonalizável. Os autovetores associados a 3 são perpendiculares aos autovetores associados a 0, logo estão no plano $x+y+z=0$. Agora podemos usar a mesma base da primeira questão da prova,

$$\left\{\left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right), \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\right), \left(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\right)\right\}.$$

c) Uma forma diagonal de A é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A matriz P é a matriz (ortogonal, para simplificar os cálculos) formadas pelos autovetores de A na ordem correspondente a D,

$$P \begin{pmatrix} 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Como P é ortogonal, P^{-1} é a transposta de P,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

---

3) Considere a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

de projeção ortogonal no plano

$$\pi : x + y - z = 0.$$

Isto é, $T(\bar{u}) = u$ se $\bar{u}$ é um vetor paralelo ao plano π e $T(\bar{n}) = \bar{0}$ se $\bar{n}$ é um vetor perpendicular ao plano π.

(a) Determine a matriz $[T]_{\mathcal{E}}$ de T na base canônica.

(b) Encontre (se possível) uma base γ tal que a matriz de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Considere a base η de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,1,-1),(0,1,1),(1,1,1)\}$$

Determine a matriz $[T]_\eta$ de T na base η.

(d) Determine os autovalores da transformação linear

$$T^5 - 3T^4 + T^3 - T^2 - 3I.$$

Resposta:

a) Consideramos uma base ortonormal α de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T,

$$\alpha = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\},$$

onde

$$\overrightarrow{u}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}),$$
$$\overrightarrow{u}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0),$$
$$\overrightarrow{u}_3 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}),$$

e

$$T(\overrightarrow{u}_1) = \overrightarrow{0}, \quad T(\overrightarrow{u}_2) = \overrightarrow{u}_2, \quad T(\overrightarrow{u}_3) = \overrightarrow{u}_3.$$

Portanto,

$$[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando matrizes de mudança de base temos que $[T]_\mathcal{E}$ é igual ao seguinte produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 + 1/6 & -1/2 + 1/6 & 2/6 \\ -1/2 + 1/6 & 1/2 + 1/6 & 2/6 \\ 2/6 & 2/6 & 4/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$[T]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

b) Não existe. Em tal caso as matrizes $[T]_\mathcal{E}$ e $[T]_\gamma$ seriam semelhantes e teriam os mesmos autovalores. Os autovalores de $[T]_\mathcal{E}$ são 1 (duplo), e 0 e os de $[T]_\alpha$ são 0 (duplo) e 2.

c) Temos

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Escrevemos

$$(1,1,2) = x\,(1,1,-1) + y\,(0,1,1) + z\,(1,1,1),$$

portanto

$$1 = x + z, \quad 1 = x + y + z, \quad 2 = -x + y + z.$$

Logo $y = 0$ (segunda equação menos a primeira equações) e $2\,z = 3$, $z = 3/2$ (primeira mais terceira). Logo $x = -1/2$.

Portanto,

$$(2/3, 2/3, 4/3) = 2/3(1,1,2) = -(1/3)\,(1,1,-1) + (3/3)\,(1,1,1).$$

Logo

$$T(1,1,1) = -1/3(1,1,-1) + 0\,(0,1,1) + 1\,(1,1,1).$$

Obtemos

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) O cálculo dos autovalores é independente da base escolhida. Escreveremos T na base α onde T é diagonal (lembre o primeiro item)

$$[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
[T]_\alpha^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
-3\,[T]_\alpha^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \\
+[T]_\alpha^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
-[T]_\alpha^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
-3\,I &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Somando temos

$$[T]_\alpha^5 - 3\,[T]_\alpha^4 + [T]_\alpha^3 - [T]_\alpha^2 - 3\,I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os autovalores são -3 e -5 (duplo).