G3 de Álgebra Linear I – 2011.2
Gabarito

---

1) Considere a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observe que os vetores $(1,1,1)$ e $(-1,1,0)$ são dois autovetores de N.

a) Determine uma forma diagonal D de N.

b) Determine uma matriz P tal que $D = P\,N\,P^t$.

c) Considere a matriz N^{-1}. Determine uma forma diagonal E de N^{-1}.

Observação: para resolver esta questão não é necessário calcular o polinômio característico de N.

Resposta:

a) Observamos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e que

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os autovalores associados a $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$ são 6 e -3, respectivamente.

Como o traço de N é a soma dos autovalores (contados com multiplicidade), temos que se λ é o terceiro autovalor de N então

$$6 + (-3) + \lambda = 1 + 1 + 4 = 6.$$

Logo $\lambda = 3$. Portanto, uma forma diagonal D de N é

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

As outras formas diagonais de N são obtidas fazendo permutações da diagonal.

b) Observe que N é uma matriz simétrica, portanto possui uma base ortogonal de autovetores. Observe que

$$N = Q\,D\,Q^t,$$

onde Q é uma matriz ortogonal ($Q^t = Q^{-1}$ e $Q^t\,Q = Q\,Q^t = Id$) cujas colunas formam uma base ortonormal de autovetores de N (associados a 6, -3 e 3). Observe que

$$Q^t\,N\,Q = Q^t\,Q\,D\,Q\,Q^t = D, \qquad D = Q^t\,N\,Q$$

e portanto $P = Q^t$.

Portanto, um autovetor $\bar{u}$ associado ao autovalor 3 deve ser ortogonal aos autovetores associados a 6 e -3. Assim ele pode ser obtido fazendo o produto vetorial dos autovetores $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$ associados a 6 e -3,

$$\bar{u} = (1,1,1) \times (1,-1,0) = \left| \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| = (1,1,-2).$$

Aplique a matriz ao vetor e verifique que $(1,1,-2)$ é um autovetor cujo autovalor é 3.

Normalizando os vetores acima, obtemos uma base ortogonal de autovetores de N é

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

Portanto,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Observe que o primeiro vetor coluna é um autovetor associado a 6, o segundo vetor coluna é um autovetor associado a -3 e o terceiro vetor coluna é um autovetor associado a 3.

Finalmente,

$$P = Q^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

c) Observe que para qualquer vetor $\bar{v}$ temos

$$N^{-1} \circ N(\bar{v}) = \bar{v}.$$

Por outro lado, temos que se $\bar{v}$ é um autovetor de N cujo autovalor associado é σ se verifica

$$N^{-1} \circ N(\bar{v}) = N^{-1}(\sigma\, \bar{v}) = \sigma\, N^{-1}(\bar{v}) = \bar{v}.$$

Logo

$$N^{-1}(\bar{v}) = \frac{1}{\sigma}\, \bar{v}.$$

Portanto, $1/\sigma$ é um autovalor de N^{-1}. Assim obtemos que os autovalores de N^{-1} são $1/6$, $-1/3$ e $1/3$ e que uma forma diagonal de N^{-1} é

$$E = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

As outras formas diagonais de N^{-1} são obtidas fazendo permutações da diagonal de E.

---

2) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de M e suas multiplicidades. Dica, 3 é um autovalor.

b) Encontre, se possível, uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de M.

c) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \text{onde } a_{2,1}, a_{2,2}, a_{3,2}, a_{3,3} \in \mathbb{R}.$$

Determine $a_{2,1}, a_{2,2}, a_{3,2}$ e $a_{3,3}$ para que

- a matriz A tenha um único autovalor λ e
- qualquer conjunto de autovetores linearmente independentes de A associados a λ tenha no máximo um elemento

(as duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente).

d) Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ -6 & b_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } b_{2,2}, b_{2,3}, b_{3,2} \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que

- a matriz B não possui inversa,
- 3 é um autovalor de B e
- $(1, 1, 0)$ é um autovetor de B,

determine $b_{2,2}, b_{2,3}$ e $b_{3,2}$.

Resposta:

a) Para determinar os autovalores calculamos o polinômio característico de M

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 3 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2+\lambda)\Big((3-\lambda)(5-\lambda)-4\Big) + 2\Big(2(5-\lambda)-6)\Big) - 4\Big(4-3(3-\lambda)\Big) =$$

$$= -(2+\lambda)\Big(\lambda^2 - 8\lambda + 11\Big) + 2\Big(4-2\lambda)\Big) - 4\Big(-5+3\lambda\Big) =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Como sabemos que 3 é raíz, temos

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (3-\lambda)(a\lambda^2 + b\lambda + c).$$

Obtemos que $a = 1$, $3c = 6$ (isto é $c = 2$) e $3\lambda^2 - b\lambda^2 = 6\lambda^2$, logo $b = -3$. As raízes de $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ são

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = 2.$$

Observe que a soma dos autovalores coincide com o traço da matriz,

$$1 + 2 + 3 = -2 + 3 + 5 = 6.$$

Portanto, os autovalores são 1, 2 e 3, todos simples.

b) Os autovalores da matriz M são 1, 2 e 3 Para determinar os autovetores associados a 1 resolvemos

$$\begin{pmatrix} -2-1 & 2 & 3 \\ -2 & 3-1 & 2 \\ -4 & 2 & 5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja o sistema

$$-3x + 2y + 3z = 0, \quad -2x + 2y + 2z = 0, \quad -4x + 2y + 4z = 0.$$

Fazendo a diferença da primeira e da segunda equação temos $-x + z = 0$, $x = z$. Substituindo temos $y = 0$. Portanto, as soluções do sistema são da forma $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$, e $(1, 0, 1)$ é um autovetor de M.

Para determinar os autovetores associados a 2 resolvemos

$$\begin{pmatrix} -2-2 & 2 & 3 \\ -2 & 3-2 & 2 \\ -4 & 2 & 5-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja o sistema

$$-4x + 2y + 3z = 0, \quad -2x + y + 2z = 0, \quad -4x + 2y + 3z = 0.$$

Ou seja

$$4x - 2y - 3z = 0, \quad 2x - y - 2z = 0.$$

Se fazemos (primeira)-2 (segunda) temos $z = 0$. Logo $y = 2\,x$. As soluções do sistema são da forma $(t, 2\,t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $(1, 2, 0)$ é um autovetor de M.

Para determinar os autovetores associados a 3 resolvemos

$$\begin{pmatrix} -2-3 & 2 & 3 \\ -2 & 3-3 & 2 \\ -4 & 2 & 5-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja o sistema

$$-5x + 2y + 3z = 0, \quad -2x + 2z = 0, \quad -4x + 2y + 2z = 0.$$

Da segunda equação obtemos $x = z$ e (substituindo na primeira) $y = x$. Logo as soluções do sistema são da forma (t, t, t), $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $(1, 1, 1)$ é um autovetor de M.

Logo uma base de autovetores da matriz M é

$$\beta = \{(1, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 1, 1)\}.$$

c) Observe que o polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = (3 - \lambda)\,(a_{2,2} - \lambda)\,(a_{3,3} - \lambda).$$

Portanto, 3 é uma raíz e 3 é um autovalor de A. Como o polinômio característico deve ter uma única raíz (caso contrário existiríam no mínimo dois autovalores diferentes de A) temos que

$$a_{2,2} = a_{3,3} = 3.$$

A seguir calcularemos os autovertores associados ao autovalor 3.

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 3-3 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos

$$a_{2,1}\, y = 0, \quad a_{3,2}\, z = 0.$$

As soluções deste sistema devem ser uma reta (caso contrário existiríam mais de um autovetor linearmente independentes associados a 3). Portanto,

$$a_{2,1} \neq 0, \qquad a_{3,2} \neq 0.$$

Uma possibilidade é

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

d) Como $(1, 1, 0)$ é um autovetor de B temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ -6 & b_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+b_{2,2} \\ -6+b_{3,2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\lambda = 1$ e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2+b_{2,2} \\ -6+b_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_{2,2} = 3, \qquad b_{3,2} = 6.$$

Logo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & b_{2,3} \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz não possui inversa seu determinante é nulo. Portanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & b_{2,3} \\ -6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -6\, b_{2,3} + 6 = 0.$$

Logo $b_{2,3} = 1$.

Outra forma de raciocinar é a seguinte. Como o determinante de B é nulo temos que B não possui inversa e portanto sua imagem é diferente de $\mathbb{R}^3$. Esta imagem somente pode ser uma reta ou um plano. Como a imagem contém os vetores

$$B(\mathbf{i}) = (1, -2, -6) \quad \text{e} \quad B(\mathbf{j}) = (0, 3, 6),$$

a única possibilidade é que a imagem seja um plano. De fato, o plano vetorial gerado por estes dois vetores, ou seja o plano vetorial de vetor normal

$$(1, -2, -6) \times (0, 1, 2) = (2, -2, 1).$$

isto é

$$2\,x - 2\,y + z = 0.$$

Temos que o vetor $B(\mathbf{k}) = (1, b_{2,3}, 0)$ deve pertence a este plano, portanto

$$2 - 2\,b_{2,3} = 0, \qquad b_{2,3} = 1.$$

---

3) Considere as bases β e γ de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 2, 0)\},$$

e

$$\gamma = \{(103, 104, 105), (104, 105, 106), (105, 106, 108)\}$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$T(1, 1, 1) = (3, 2, 3), \quad T(1, 0, 1) = (2, 0, 2), \quad T(1, 2, 0) = (1, 1, 1).$$

a) Determine a matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

b) Considere a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ. Determine o traço de $[T]_\gamma$.

c) Determine, se possível, uma forma diagonal D de T. Caso não exista, justifique sua resposta.

Nota: as coordenadas dos vetores estão escritas na base canônica.

Resposta:

a) Escrevemos

$$\beta = \{\bar{u}_{=}(1,1,1), \bar{u}_2 = (1,0,1), \bar{u}_3 = (1,2,0)\},$$

e observamos que

- $T(\bar{u}_1) = T(1,1,1) = (3,2,3) = x\,\bar{u}_1 + y\,\bar{u}_2 + z\,\bar{u}_3,$
- $T(\bar{u}_2) = T(1,0,1) = (2,0,2) = 2\,\bar{u}_2,$
- $T(\bar{u}_3) = T(1,2,0) = (1,1,1) = \bar{u}_1.$

Portanto, a matriz de T na base β é

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinaremos x, y, z. Escrevemos

$$(3,2,3) = x\,(1,1,1) + y\,(1,0,1) + z\,(1,2,0),$$

e obtemos o sistema linear

$$3 = x + y + z, \quad 2 = x + 2\,z, \quad 3 = x + y.$$

Portanto (primeira equação menos a terceira) $z = 0$. Da segunda equação obtemos $x = 2$ e substituindo $y = 1$. Logo

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Observe que

$$[T]_\gamma = Q^{-1}\,[T]_\beta\,Q,$$

onde Q é a matiz de mudança de base da base γ para a base β. Assim, as matrizes $[T]_\gamma$ e $[T]_\beta$ são semelhantes e, portanto, têm o mesmo traço. Este traço é $2 + 2 + 0 = 4$.

c) Para determinar a forma diagonal de T é suficiente considerar a matriz de T em qualquer base (por exemplo, na base β) e calcular seus autovalores (que são independentes da escolha da base) e autovetores (escritos na base correspondente).

Determinamos o polinômio característico de T usando a matriz $[T]_\beta$,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(2-\lambda)^2.$$

Logo os autovalores são 0 e 2 (multiplicidade 2). Para que exista uma forma diagonal devem existir dois autovetores linearmente independentes associados a 2. Calculamos (na base β) estes autovetores:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 1 \\ 1 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$z = 0, \quad x = 0.$$

Portanto, os autovetores associados a 2 são da forma

$$0\,\bar{u}_1 + y\,\bar{u}_2 + 0\,\bar{u}_3, \quad y \neq 0.$$

Logo todos os autovetores associados a 2 são paralelos a $\bar{u}_2$. Portanto existe no máximo um autovetor linearmente independente associado a 2. Portanto, não existe uma forma diagonal de T.