P3 de Álgebra Linear I – 2010.1

24 de junho de 2010.

Gabarito

Questão 1)

a) Sabemos que $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \text{traço}(A) = 3+2+0 = 5$. Também temos $\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3 = \det(A) = 4$. Então, com $\lambda = \lambda_3 = 1$ temos o sistema 2x2:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 4 \\ \lambda_1.\lambda_2 = 4. \end{cases}$$

Temos $\lambda_1 = 4-\lambda_2$ e substituindo na outra eq., temos $\lambda_2^2-4\lambda_2+4 = 0$, equação do 2o. grau tendo 2 como raíz dupla. Assim, polinõmio característico de A é $p_A(x) = (1-x)(x-2)^2$, donde os autovalores são 1 (simples) e 2 (duplo).

b) Para $x = 1$, resolvemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

resultando nos autovetores $t(1,0,2)$, para $t \neq 0$.

Para $x = 2$, resolvemos o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} . \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

resultando nos autovetores $t(1,1,2)$, para $t \neq 0$.

(c) A *não* é diagonalizável pois só é possível obter dois autovetores linearmente independentes associados a cada autovalor distinto (por exemplo, $(1,0,2)$ e $(1,1,2)$. Logo não existe base de $\mathbb{R}^3$, constituída de autovetores de A.

(d) Como $T(1,1,2) = 2(1,1,2)$ e $T(1,0,2) = (1,0,2)$, vem que $(T(1,1,2))_\beta = (2,0,0)$ e $(T(1,0,2))_\beta = (0,1,0)$. Agora,

$$T(0,0,1) = (-1,-1,0) = a(1,1,2)+b(1,0,2)+c(0,0,1) = (a+b, a, 2a+2b+c),$$

e resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ a=-1 \\ 2a+2b+c=0 \end{cases}$$

obtemos $(T(0,0,1))_\beta = (a,b,c) = (-1,0,2)$.

Finalmente

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Questão 2)

a) Temos

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 9] =$$
$$(6-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)(6-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2).$$

Assim, há tres autovalores distintos: 6, 4 e -2.

b) Sendo a matriz simétrica sabemos que é ortogonalmente diagonalizável. Achemos os autovetores:

Para $\lambda = 6$, resolvemos os sistema:

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

resultando nos autovetores $t(0,1,0)$, para $t \neq 0$.

Para $\lambda = 4$, resolvemos os sistema:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} . \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

resultando nos autovetores $t(1, 0, 1)$, para $t \neq 0$.

Para $\lambda = -2$, resolvemos os sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

resultando nos autovetores $t(1, 0, -1)$, para $t \neq 0$.

Assim, uma base ortonormal de autovetores de B é

$$\gamma = \{(0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\}.$$

c) Com a base acima, temos que $B = MDM^t$, onde:

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

e M é a matriz ortogonal de mudança da base canônica para a base γ, i.e.,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Questão 3)

(a) FALSA: Como a matriz de T é simétrica, segue do teorema espectral que existe base ortonormal de autovetores, de T, digamos $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$. Pelo que foi dado, temos $T(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_1}$ e $T(\overrightarrow{u_2}) = T(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{0}$. Dado um vetor qq $\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + a_3\overrightarrow{u_3}$, temos que $T(\overrightarrow{u}) = a_1\overrightarrow{u_1}$, logo trata-se de projeção ortogonal sobre a reta cujo vetor diretor é $\overrightarrow{u_1}$, i.e., na direção de $(1, 1, 1)$.

(b) VERDADEIRA: Sabemos que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ é L.I. pois são autovetores associados a autovalores distintos. Suponha que $aT(\overrightarrow{v_1})+bT(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0}$. Então $a\lambda_1\overrightarrow{v_1} + b\lambda_2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$, donde $a\lambda_1 = b\lambda_2 = 0$ o que implica que $a = b = 0$, uma vez que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Logo $\{T(\overrightarrow{v_1}), T(\overrightarrow{v_2})\}$ é L.I.

(c) FALSA: Tome

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então A é ortogonal, pois $A.A^t = I$, e tem polinômio característico

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

que não tem raízes reais.