P3 de Álgebra Linear I – 2009.2

Gabarito

Questão 1)

Ache a inversa da matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Atenção: 1 erro na matriz inversa, perde 0.5 pto.; 2 erros perde 1 pto.; 3 ou mais erros zera a questão.

Resposta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 2/3 & 4/3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7/3 & -1/3 & -5/3 \end{pmatrix}.$$

Questão 2)

Considere a transformação linear S cuja matriz na base canônica é

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) A transformação S é diagonalizável? Justifique.

(b) Ache, se possível, uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ na qual a matriz de S é

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

a) O polinômio característico de S é

$$p_S(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Logo S possui um único autovalor duplo: $\lambda = 3$. Calculamos os autovetores associados:

I.e., são da forma $(t, t) = t(1, 1)$, com $t \neq 0$. Logo, autoespaço é uma reta pela origem, donde não existe uma base de autovetores de S, i.e., S não é diagonalizável.

b) Para existir tal base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$, deve-se ter $S(\overrightarrow{u}) = 3\overrightarrow{u}$ e $S(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$. Podemos escolher $\overrightarrow{u} = (1, 1)$ e o vetor $\overrightarrow{v} = (x, y)$ tem de satisfazer o sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix},$$

de onde se obtém que $y = x + 1$; ou seja vetores da forma $(s, 1 + s)$, com $s \in \mathbb{R}$. Assim, por exemplo, a base procurada pode ser $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$.

Questão 3)

Decida se as afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras.

(a) Para quaisquer matrizes ortogonais M e N tem-se que $M + N$ é ortogonal.

(b) Toda matriz triangular é diagonalizável.

(c) Toda matriz A não-nula tal que $A^2 = A$ possui um autovalor $\lambda = 1$.

Resolução:

(a) Considere

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

M e N são ortogonais (linhas/colunas formam base ortonormal) mas,

$$M + N = \begin{pmatrix} 1 + 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1 + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

não é ortogonal. Logo afirmativa **falsa**.

(b) Considere a matriz triangular

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)^2$, i.e., tem um único autovalor duplo $=1$. Os autovetores são da forma $(t, 0)$, com $t \neq 0$; logo esta matriz não admite base de autovetores, i.e., não é diagonalizável. A afirmação é portanto **falsa**.

(c) Como A é não-nula, existe algum vetor $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, com $\overrightarrow{w} = A(\overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Agora,

$$\overrightarrow{w} = A(\overrightarrow{v}) = A^2(\overrightarrow{v}) = A(A(\overrightarrow{v})) = A(\overrightarrow{w}),$$

ou seja $\overrightarrow{w}$ é autovetor de A com autovalor um. A afirmação é **verdadeira**.

Questão 4)

Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que $\lambda_1 = 2$ é um autovalor de M:

(a) Ache os outros autovalores λ_2 e λ_3.

(b) Ache (explicitamente) uma base ortonormal de autovetores de M.

(b) Ache (explicitamente) uma matriz diagonal D e uma matriz ortogonal P tais que $M = PDP^t$.

Resolução:

(a) Sabemos que

$$\text{traço}(M) = 6 = 2 + \lambda_2 + \lambda_3$$

Também temos

$$\det(M) = 4 = 2\lambda_2\lambda_3.$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_2\lambda_3 = 2, \end{cases}$$

de onde tiramos

$$\lambda_2 + \frac{2}{\lambda_2} = 4 \Rightarrow \lambda_2^2 - 4\lambda_2 + 2 = 0.$$

As raízes desta eq. do 2o. grau são $2 \pm \sqrt{2}$. Como λ_2, λ_3 aparecem simétricamente na eq. acima, podemos tomar $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ e $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$ (ou na ordem trocada).

(b) Calculemos os autovetores de M:

Temos, para $\lambda_1 = 2$, o sistema,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

logo $y = 0$ e $x = -z$, e os autovetores são da forma $(t, 0, -t) = t(1, 0, -1)$, para $t \neq 0$.

Para $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$, temos o sistema:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} . \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \sqrt{2} + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

Segue que $x = z$ e $y = -\sqrt{2}x$, e os autovetores são da forma $(t, -\sqrt{2}t, t) = t(1, -\sqrt{2}, 1)$, com $t \neq 0$.

De maneira análoga, para $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$ obtemos autovetores da forma $(t, \sqrt{2}t, t) = t(1, \sqrt{2}, 1)$, com $t \neq 0$.

Note que $\{(1, 0, -1), (1, -\sqrt{2}, 1), (1, \sqrt{2}, 1)\}$ é uma base de autovetores ortogonais. Assim, uma base ortonormal de autovetores de M é

$$\mathcal{A} = \{(\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2), (1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2), (1/2, \sqrt{2}/2, 1/2)\}.$$

(c) Com relação à base $\mathcal{A}$, a matriz diagonal fica

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

A matriz de mudança da base $\mathcal{A}$ para a base canônica é

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

que é ortogonal pois suas colunas consistem dos elementos da base ortonormal $\mathcal{A}$. Por construção $M = PDP^t$, uma vez que $P^{-1} = P^t$.
