P3 de Álgebra Linear I – 2009.1

19 de Junho de 2009.

Gabarito

---

1)

(a) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sejam $B = A^2$ e C a matriz inversa de B, (isto é $C = B^{-1}$). Suponha que

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Determine o coeficiente $c_{1,2}$ da matriz C.

Resposta:

Calcularemos a inversa da matriz A usando o método de Gauss.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (II)-2 (I) e (III)-2 (I):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $-(\mathrm{II})$ e $-(\mathrm{III})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $(\mathrm{III}){-}3\,(\mathrm{II})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

5. $-(1/2)\,(\mathrm{III})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

6. $(\mathrm{II}){-}(\mathrm{III})$ e $(\mathrm{I}){-}(\mathrm{III})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

7. $(\mathrm{I}){-}2\,(\mathrm{II})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Temos $B = A\,A$. Portanto, $A^{-1}\,A^{-1}$ verifica

$$(A\,A)\,(A^{-1}\,A^{-1}) = A\,(A\,A^{-1})\,A^{-1} = A\,(Id)\,A^{-1} = A\,A^{-1} = Id.$$

Logo

$$C = A^{-1}\,A^{-1}.$$

Temos

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= -1\,(1/2) + (1/2)\,(1/2) + (1/2)\,(-3/2) = \\ &= -(1/2) + (1/4) - (3/4) = -1. \end{aligned}$$

---

prova A)

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.
$$c_{1,2} = -1.$$

prova B)

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$c_{1,2} = -\frac{1}{2}.$$

prova C)

1.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$c_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

prova D)

1.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.
$$c_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

---

2) Considere matrizes 3×3 A, B e C.

(a) Sabendo que $A^2 = A$ e que o determinante de A é diferente de zero, encontre um autovalor de A.

(b) Suponha que a matriz B verifica

$$B = PDP^{-1},$$

onde
$$P = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ache **todos** os autovalores de B e para cada autovalor de B ache um autovetor associado.

(c) Suponha que
$$C = \begin{pmatrix} 22 & 31 & 17 \\ 44 & 62 & 34 \\ 66 & 93 & 51 \end{pmatrix}.$$

Prove que os autovalores de C são 0 (de multiplicidade 2) e

$$22 + 62 + 51 = 135.$$

Resposta:

a) Como o polinômio característico da matriz A tem grau 3 sabemos que A tem um autovalor real σ. Seja v um autovetor associado. Temos,

$$A^2(v) = A(\sigma\, v) = \sigma A(v) = \sigma^2\, v.$$

Mas, como $A^2 = A$,

$$A^2(v) = A(v) = \sigma\, v.$$

Logo,

$$\sigma^2\, v = \sigma\, v,$$

isto é, $\sigma^2 = \sigma$, $\sigma = 1$ ou $\sigma = 0$.

Como a matriz A tem determinante diferente de zero, não tem nenhum autovalor nulo. Portanto, $\sigma = 1$.

b) A matriz B é semelhante a matriz diagonal D. Portanto, seus autovalores são 1, -1 e 2. Temos também que as colunas da matriz P são autovetores correspondentes a esses autovalores (a ordem é essencial). Resumindo:

- o autovalor 1 tem como autovetor associado $(6, 3, 2)$,
- o autovalor -1 tem como autovetor associado $(-3, 2, 6)$,
- o autovalor 2 tem como autovetor associado $(2, 6, -3)$.

c) Como as linhas da matriz C são proporcionais (a segunda linha é obtida multiplicando por dois a primeira, e a terceira linha é obtida multiplicando por três a primeira), o determinante é nulo. Como o determinante é o produto dos autovalores (contados com multiplicidade), existe um autovalor de C igual a zero. Os autovetores associados ao autovalor 0 são os vetores não nulos do plano

$$22\, x + 31\, y + 17\, z = 0.$$

Ou seja, existem dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor 0. Portanto a multiplicidade de 0 é no mínimo 2 (ou seja, dois ou três). Não pode ter multiplicidade 3, pois em tal caso o traço da matriz seria nulo. Assim a multiplicidade de 0 é 2.

Falta determinar um autovalor de C que chamaremos λ. Para isso usamos que a soma dos autovalores de C contados com multiplicidades é o traço de C. Portanto,

$$0 + 0 + \lambda = 22 + 62 + 51 = 135,$$

o que prova a afirmação.

---

3) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$\begin{aligned} T(1,\,-1,\,1) &= 2\,(1,\,-1,\,1),\\ T(1,\,1,\,0) &= 3\,(1,\,1,\,0),\\ T(1,\,0,\,-1) &= 3\,(1,\,0,\,-1). \end{aligned}$$

(a) Determine os autovalores de T e suas multiplicidades.

(b) Encontre, se possível, uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

(c) Escreva a matriz $[T]_{\mathcal{E}}$ de T na base canônica da forma

$$[T]_{\mathcal{E}} = M\,D\,M^{-1},$$

onde D é diagonal. As matrizes M, D e M^{-1} devem ser calculadas **explicitamente**.

Resposta:

a) Temos que 2 e 3 são autovalores de T. Observe que 3 tem dois autovetores linearmente independentes (note que os autovetores $(1,1,0)$ e $(1,0,-1)$ de T são não paralelos). Assim a multiplicidade de 3 é no mínimo 2. Não pode ser 3, pois em tal caso 3 seria o único autovalor de T, e isto não é possível, pois 2 também é um autovalor de T.

b) Note que o plano

$$\pi\colon x - y + z = 0$$

é perpendicular ao autovetor $(1,-1,1)$ de T associado a 2 e que os autovetores $(1,1,0)$ e $(1,0,-1)$ de T associados a 3 estão em dito plano. Portanto, todo vetor no nulo do plano π é um autovetor de T associado a 3.

Para determinar uma base ortogonal de autovetores de T escolhemos $(1,-1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,-1,1)\times(1,1,0)=(-1,1,2)$ (este último vetor está no plano π e portanto é um autovetor associado a 3). Para obter a base de autovetores falta normalizar os vetores acima, obtendo a base

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\right\}.$$

c) Escolhemos D uma forma diagonal de T, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A matriz M deve ser uma matriz cujas colunas sejam autovetores associados a 2, 3 e 3 (nessa ordem). Como teremos que inverter a matriz M o mais simples é escolher M ortogonal (usamos o item (b)) e assim $M^{-1}=M^t$. Portanto,

$$M=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

---

4) Considere a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[L]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de L e suas multiplicidades.

(b) Existe uma forma diagonal de L? Explique cuidadosamente sua resposta.

(c) Considere a base de $\mathbb{R}^3$.

$$\beta = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}.$$

Determine a matriz $[L]_\beta$ de L na base β.

Resposta:

a) O polinômio característico de L é:

$$\left|\begin{array}{ccc} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{array}\right| \begin{array}{l} = (-\lambda)\,(1-\lambda)\,(2-\lambda) - (-1\,(2-\lambda)+1) = \\ = (-\lambda)\,(\lambda^2 - 3\,\lambda + 2) + 1 - \lambda = \\ = -\lambda^3 + 3\,\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3. \end{array}$$

Portanto, 1 é o único autovalor de L e sua multiplicidade é 3.

b) Para ver se L é diagonalizável devemos estudar se existe uma base de autovetores de L. Para isso temos que determinar os autovetores de 1. Devemos resolver o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 0-1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, o sistema

$$-x + y = 0 \quad -x + z = 0, \quad -x + z = 0.$$

Portanto,

$$x = y = z$$

Assim, as soluções são da forma (t,t,t), $t \in \mathbb{R}$. Portanto, somente é possível encontrar (no máximo) um autovetor linearmente independente. Desta forma, não existe uma base de autovetores de L e não é diagonalizável.

c) Temos
$$\beta = \{v_1 = (0,0,1),\, v_2 = (0,1,1),\, v_3 = (1,1,1)\}.$$
Calcularemos as imagens por L destes vetores
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Portanto,
$$T(v_1) = (0,1,2) = x\,(0,0,1) + y\,(0,1,1,) + z\,(1,1,1).$$
Logo
$$z = 0, \qquad y + z = 1,\; y = 1, \qquad x + y + z = 2,\; x = 1.$$
Assim,
$$(T(v_1))_\beta = (1,1,0).$$
Da mesma forma,
$$T(v_2) = (1,2,2) = x\,(0,0,1) + y\,(0,1,1,) + z\,(1,1,1).$$
Logo
$$z = 1, \qquad y + z = 2,\; y = 1, \qquad x + y + z = 2,\; x = 0.$$
Assim,
$$(T(v_2))_\beta = (0,1,1).$$
Finalmente,
$$T(v_3) = (1,1,1) = v_3, \qquad (T(v_3))_\beta = (0,0,1).$$
Portanto, a matriz de L na base β é
$$[L]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$