P3 de Álgebra Linear I – 2005.2

Data: 21 de novembro de 2005.

Gabarito

---

1)

(1.a) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que $(1,1,1)$ é um autovetor de M e que 1 é um autovalor de M, escreva M da forma

$$M = P\,D\,P^{-1},$$

onde D é uma matriz diagonal.

(1.b) Considere a matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine uma forma diagonal C de Q.

Resposta:

(1.a) Como já sabemos que $(1,1,1)$ é um autovetor de M, podemos determinar seu autovalor associado calculando sua imagem por M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, 4 é um autovalor de M.

Como o traço da matriz M é a soma dos seus autovalores (contados com multiplicidade), e como já sabemos que 1 e 4 são autovalores de M, temos que se λ é o terceiro autovalor de M, se verifica

$$\text{traço}(M) = 1 + 1 + 2 = 4 = 1 + 4 + \lambda, \quad \lambda = -1.$$

Portanto, uma forma diagonal D de M é:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como M é uma matriz simétrica podemos escolher a matriz P ortogonal (portanto, $P^{-1} = P^t$). Observamos que P é uma matriz cujas colunas são autovetores unitários associados a 1, -1 e 4, respectivamente.

Determinaremos os autovetores de 1,

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 1 \\ 2 & 1-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y + z \\ 2\,x + z \\ x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os autovetores de 1 são da forma $(t, t, -2\,t)$. Um autovetor é $(1, 1, -2)$.

Como a matriz M é simétrica e $(1, 1, 1)$ e $(1, 1, -2)$ são autovetores associados a autovalores diferentes, temos que os autovetores associados a -1 devem ser ortogonais a $(1, 1, 1)$ e $(1, 1, -2)$. Portanto, $(1, 1, 1) \times (1, 1, -2)$ é um autovetor de -1. Podemos escolher $(1, -1, 0)$ como autovetor de -1.

Normalizando os autovetores acima, obtemos uma base ortonormal de autovetores de M:

$$\beta = \{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}); (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0); (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

Portanto, a matriz P é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(1.b) Observamos que Q é uma matriz simétrica. Portanto, ela é diagonalizável, e para determinar suas formas diagonais é suficiente calcular seus autovalores.

O polinômio característico da matriz Q é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(1-\lambda)^2 - 2(2)\,(1-\lambda) + 1(-(1-\lambda))$$

$$= (1-\lambda)\,((1-\lambda)^2 - 4 - 1) =$$

$$= (1-\lambda)\,(\lambda^2 - 2\,\lambda - 4).$$

Portanto, as raízes do polinômio característico são

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Portanto, uma forma diagonal C de Q é

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

---

2) Considere as matrizes

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & e \\ b & 1/3 & f \\ c & d & g \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & q \\ m & 1/3 & r \\ n & p & s \end{pmatrix}.$$

(2.a) Ache b, c, d, e, f e g para que E represente na base canônica um espelhamento (ortogonal) com respeito a um plano.

(2.b) Determine a equação cartesiana do plano de espelhamento do item (2.a).

(2.c) Ache m, n, p, q, r e s para que F represente na base canônica uma rotação.

(2.d) Determine $\cos(\varphi)$, onde φ é o ângulo da rotação do item (2.c).

Resposta: Em primeiro lugar observemos o seguinte:

- Para que a matriz E represente uma espelhamento na base canônica deve ser uma matriz simétrica, ortogonal e ter traço 1 (de fato, estas condições caracterizam os espelhamentos em planos).

- Para que F represente uma rotação, ela deve ser ortogonal, não simétrica (excluimos as rotações de ângulos π e 0 graus) e ter determinante igual a 1 (como no caso anterior, estas condições caracterizam as rotações).

Portanto, em ambos os casos, os vetores colunas devem ser unitários, assim temos duas escolhas possíveis para d e p:

$$d, p = 2/3 \quad \text{ou} \quad d, p = -2/3.$$

(2.a) Escolhemos primeiro $d = 2/3$. Como a matriz deve ser simétrica temos

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & e \\ b & 1/3 & f \\ c & 2/3 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & e \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ c & 2/3 & g \end{pmatrix}.$$

Um espelhamento em um plano possui autovalores 1 (multiplicidade 2) e -1 (simples), logo tem traço igual a 1. Assim $g = 1/3$.

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & e \\ b & 1/3 & f \\ c & 2/3 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & e \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ c & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, o primeiro vetor coluna deve ser ortogonal ao segundo, logo $c = -2/3$. Por simetria, $e = -2/3$.

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Veja usando o produto escalar que os vetores correspondentes a primeira e terceira colunas são ortogonais. Desta forma obtemos uma matriz ortogonal, simétrica e com traço igual a 1.

A outra opção para d é $d = -2/3$. Nesse caso, raciocinando de forma absolutamente idêntica, obtemos usando a simetria e o traço

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & e \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ c & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Neste caso a relação de ortogonalidade dos vetores coluna fornece $c = 2/3$ e $e = 2/3$,

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Assim obtemos a segunda possibilidade para a matriz E.

Logo as duas repostas possíveis são:

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(2.b) Para determinar o plano de espelhamento é suficiente calcular os autovetores associados a 1. No caso da escolha $d = 2/3$ obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1/3-1 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3-1 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2\,x + 2\,y - 2\,z \\ 2\,x - 2\,y + 2\,z \\ -2\,x + 2\,y - 2\,z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -x + y - z \\ x - y + z \\ -x + y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo o plano é

$$\pi\colon x - y + z = 0.$$

Outra possibilidade dado qualquer vetor não nulo v o vetor $E(v) - v$ é normal ao plano de projeção. escolhendo $v = (1, 0, 0)$ temos que $E(v) = (1/3, 2/3, -2/3)$, logo

$$E(v) - v = (1/3, 2/3, -2/3) - (1, 0, 0) = (-2/3, 2/3, -2/3).$$

E obtemos o mesmo plano.

Se escolhemos $d = -2/3$ obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1/3-1 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3-1 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2\,x+2\,y+2\,z \\ 2\,x-2\,y-2\,z \\ 2\,x-2\,y-2\,z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y-z \\ x-y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo o plano é

$$\pi\colon x-y-z=0.$$

(2.c) Escolhemos primeiro $p = 2/3$. Observe que se escolhemos a matriz sendo simétrica obteremos espelhamentos, logo devemos ensaiar com $m = -2/3$.

$$F = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & q \\ -2/3 & 1/3 & r \\ n & 2/3 & s \end{pmatrix}.$$

Como o primeiro vetor coluna deve ser ortogonal ao segundo, $n = 2/3$.

$$F = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & q \\ -2/3 & 1/3 & r \\ 2/3 & 2/3 & s \end{pmatrix}.$$

Agora, o terceiro vetor coluna deve ser ortogonal aos dois primeiros. Observe que se fazemos

$$(q, r, s) = (-1/3, -2/3, 2/3) \times (2/3, 1/3, 2/3) = (-2/3, 2/3, 1/3)$$

obtemos uma matriz ortogonal de determinante igual a 1. Para isto é suficiente observar que

$$\det(F) = (-1/3, -2/3, 2/3) \cdot ((2/3, 1/3, 2/3) \times (-2/3, 2/3, 1/3)).$$

Pelas propriedades do produto misto,

$$\begin{aligned} \det(F) &= -(-2/3, 2/3, 1/3) \cdot ((2/3, 1/3, 2/3) \times (-1/3, -2/3, 2/3)) = \\ &= (-2/3, 2/3, 1/3) \cdot ((-1/3, -2/3, 2/3) \times (2/3, 1/3, 2/3)) = \\ &= (-2/3, 2/3, 1/3) \cdot (-2/3, 2/3, 1/3) = 1. \end{aligned}$$

Logo quando $p = 2/3$ a resposta é

$$F = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Suponha agora que escolhemos $p = -2/3$, como o vetor deve ser ortogonal ao segundo, teriamos

$$F = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & q \\ -2/3 & 1/3 & r \\ -2/3 & -2/3 & s \end{pmatrix}.$$

Raciocinando como no caso anterior, temos

$$(q, r, s) = (-1/3, -2/3, -2/3) \times (2/3, 1/3, -2/3) = (2/3, -2/3, 1/3)$$

Assim obtemos a matriz

$$F = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Como no primeiro caso, esta matriz possui determinante 1.

Logo as respostas possíveis são

$$F = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad F = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(2.d) Para este item é suficiente observar que matrizes semelhantes têm o mesmo traço e que uma matriz de rotação é semelhante a uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

onde φ é o ângulo de rotação. Portanto,

$$\text{traço}(F) = 1/3 = 1 + 2\cos\varphi, \quad \cos\varphi = -1/3.$$

3) Considere os vetores

$$v_1 = (1,1,0), \quad v_2 = (1,0,1), \quad v_3 = (0,1,1),$$

a base

$$\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$$

e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = (v \cdot v_1)\, v_1 + (v \cdot v_2)\, v_2.$$

(3.a) Determine a matriz da transformação linear T na base β.

(3.b) Determine explicitamente a matriz N de mudança de base da base canônica à base β.

(3.c) Determine uma forma diagonal de T.

Resposta:

(3.a) As colunas da matriz da transformação linear T na base β são as coordenadas dos vetores $T(v_1)$, $T(v_2)$ e $T(v_3)$ na base β:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= (v_1 \cdot v_1)\, v_1 + (v_1 \cdot v_2)\, v_2 = \\ &= ((1,1,0) \cdot (1,1,0))\, v_1 + ((1,1,0) \cdot (1,0,1))\, v_2 = \\ &= 2\, v_1 + v_2; \\ \\ T(v_2) &= (v_2 \cdot v_1)\, v_1 + (v_2 \cdot v_2)\, v_2 = \\ &= ((1,0,1) \cdot (1,1,0))\, v_1 + ((1,0,0) \cdot (1,0,1))\, v_2 = \\ &= v_1 + 2\, v_2; \\ \\ T(v_3) &= (v_3 \cdot v_1)\, v_1 + (v_3 \cdot v_2)\, v_2 = \\ &= ((0,1,1) \cdot (1,1,0))\, v_1 + ((0,1,1) \cdot (1,0,1))\, v_2 = \\ &= v_1 + v_2. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de T na base β é

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3.b) A matriz de mudança de base da base β à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto a matriz N é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Calcularemos esta inversa usando o método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz procurada é:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(3.c) Para determinar uma forma diagonal de T é suficiente calcular os autovalores de T, e estes não dependem da base (a matriz de T na base canônica é semelhante à matriz de T na base β e matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores). Portanto, podemos usar a matriz de T na base β.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,((2-\lambda)^2-1)) = -\lambda\,(\lambda^2-4\,\lambda+3).$$

Portanto, os autovalores são:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.\lambda = 0, \qquad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1.$$

Logo os autovalores são $0, 3, 1$ (isto é compatível com o traço ser igual a 3). Portanto, uma forma diagonal é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$