P3 de Álgebra Linear I – 2005.1

Gabarito Prova Modelo

---

1) Determine para que valores de a e b as matrizes abaixo são diagonalizáveis:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine c e d para que os vetores não nulos do plano $\pi\colon x + y = 0$ sejam autovetores da matriz abaixo e o vetor $(17, 21, 356)$ não seja um autovetor:

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ d & 3 & 0 \\ c & c & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas: Observe primeiro que todas as matrizes são triangulares, portanto seus autovalores são as entradas da diagonal principal com as multiplicidades correspondentes. Logo,

- a matriz do item (a) tem um único autovalor $\lambda = 3$ de multiplicidade 2,
- a matriz do item (b) tem autovalores $\lambda = 2$ de multiplicidade 2 e 1 simples, e
- a matriz do item (c) tem um único autoavalor $\lambda = 3$ de multiplicidade 3.

Lembre também que uma matriz é diagonalizável se, e somente se, possui uma base de autovetores.

Para a matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

devemos ver quando existem dois autovetores linearmente independentes associados a 3. Isto é, o sistema

$$\begin{pmatrix} 3-3 & a \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ay = 0$$

deve ter $\mathbb{R}^2$ como soluções. Portanto, $a = 0$.

Para que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

seja diagonalizável, o autovalor 2 de multiplicidade dois deve ter dois autovetores linearmente independentes, ou seja as soluções do sistema

$$\begin{pmatrix} 1-2 & b & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

devem formar um plano. Temos que as soluções devem verificar

$$-x + by = 0,$$

que sempre é um plano, independentemente do valor de b. Ou seja, para todo $b \in \mathbb{R}$ a matriz é diagonalizável.

Finalmente, para o item (c) observe que os autovetores da matriz (associados a 3) devem verificar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad dx = 0, \quad cx + cy = 0.$$

Observe que se $d \neq 0$ então $x = 0$. Neste caso há vetores não nulos do plano $x + y = 0$ (por exemplo $(1, -1, 0)$) que não são autovetores (pois não são solução do sistema). Portanto $d = 0$. Logo a solução do sistema é

$$cx + cy = 0.$$

Se $c = 0$, (como já sabemos que $d = 0$) qualquer vetor é solução do sistema, em particular o vetor $(17, 21, 356)$. Logo $c \neq 0$. Neste caso as soluções formam o plano $x + y = 0$. Portanto, a resposta é $d = 0, c \neq 0$.

---

2) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica

$$\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine o polinômio característico p_T de T.

b) Determine os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(0,-1,1), (0,1,1), (1,0,1)\}.$$

c) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base β.

d) Determine a primeira coluna da matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

e) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas: O polinômio característico p_T de T 'e

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9.$$

Portanto, os autovalores são 1 (simples) e 3 (multiplicidade 2).

Os autovetores associados a 1 são as soluções não nulas do sistema

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é, $y = 0 = z$. Logo os autovetores associados a 1 são da forma $(t, 0, 0)$, $t \neq 0$.

Analogamente, os autovetores associados a 3 são as soluções não nulas do sistema

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é, $z = 0$, $x = 0$. Logo os autovetores associados a 3 são da forma $(0, t, 0)$, $t \neq 0$.

Observe que não existem dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor 3 de multiplicidade 2, portanto a matriz não é diagonalizável.

Observe que a matriz de mudança de base da base β à base canônica é:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz de mudança de base da base canônica à base β é

$$P = M^{-1}.$$

Usaremos o método de escalonamento para calcular a matriz inversa de M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$[T]_\beta = P\ [T]_\mathcal{E}\ P^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [T]_\beta &= \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que $[T]_\beta$ e $[T]_\mathcal{E}$ têm o mesmo traço e confira que

$$\begin{aligned} T(0,-1,1) &= (1,-2,3) &&= 2\,(0,-1,1) + 0\,(0,1,1) + 1\,(1,0,1); \\ T(0,1,1) &= (1,4,3) &&= -1\,(0,-1,1) + 3\,(0,1,1) + 1\,(1,0,1); \\ T(1,0,1) &= (2,1,3) &&= 0\,(0,-1,1) + 1\,(0,1,1) + 2\,(1,0,1). \end{aligned}$$

Seja $\gamma = \{u, v, w\}$. Observe que pela definição de $[T]_\gamma$,

$$T(u) = u, \quad T(v) = 3v, \quad , T(w) = 3w + v.$$

Portanto, u e v devem ser autovetores de T associados a 1 e 3, respetivamente. Pelo segundo item podemos escolher

$$u = (1,0,0), \quad v = (0,1,0).$$

Escrevamos (na base canônica) $w = (a, b, c)$. Sabemos que

$$T(w) = (a + c, 3b + c, 3c).$$

Portanto,

$$(a+c, 3b+c, 3c) = (3a, 3b, 3c) + (0,1,0).$$

Logo

$$a = 1/2, \quad c = 1, \quad b = \mathrm{t}, t \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$\gamma = \{(1,0,0), (0,1,0), (1/2, t, 1)\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

3)

a) O produto de matrizes abaixo representa (na base canônica) uma projeção P. Determine a equação cartesiana do plano π de projeção e a direção v de projeção.

$$P = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}, \qquad \text{onde} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtida como a composição da projeção ortogonal no plano π e o espelhamento no plano ρ, onde

$$\pi\colon x + y - 2\,z = 0, \qquad \rho\colon x + y + z = 0.$$

Encontre uma matriz R tal que a matriz de T na base canônica seja o produto

$$[T]_{\mathcal{E}} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^t.$$

Respostas: Sejam u, v e w os vetores coluna da matriz M e considere a base $\gamma = \{u, v, w\}$. Temos que a matriz de P na base γ é

$$[P]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, u e w são autovetores associados a 1 e geram o plano π de projeção. Analogamente, v é um autovetor associado a 0, determinando a direção de projeção. Logo devemos calcular a matriz M inversa de M^{-1}. Para calcular a inversa utilizaremos o método de escalonamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Logo a direção de projeção é $(2,-1,-1)$ e o plano π está gerado por $(1,1,1)$ e $(1,-2,1)$. Logo seu vetor normal é

$$(1,1,1) \times (1,-2,1) = (3,0,-3),$$

e

$$\pi \colon x - z = 0.$$

Para o item (b), observe que os planos π e ρ são ortogonais (seus vetores normais são perpendiculares). Considere a base ortogonal

$$\eta = \{(1,1-2) \times (1,1,1) = (3,-3,0), (1,1,1), (1,1,-2,)\}$$

Seja P a projeção e E o espelhamento. Na base η temos,

$$[P]_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [E]_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, como $T = E \circ P = P \circ E$, temos

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta afirmação também vale para a base ξ obtida normalizando η. Observe que a base assim obtida é ortonormal

$$\xi = \left\{ (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}) \right\}.$$

Seja R a matriz ortogonal cujas colunas são os vetores da base ξ. Logo $R^{-1} = R^t$. Observando que R^t é a matriz de mudança de base da canônica à base ξ e que R é a matriz de mudança de base da base ξ à canônica, temos

$$[T]_{\mathcal{E}} = R\ [T]_\xi\ R^t = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^t.$$

Portanto,

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

---

4) Considere a matriz

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sabendo que $(1, 0, 1)$ é um autovetor de A e que (-1) é um autovalor de A.

a) Determine uma forma diagonal D da matriz A.

b) Determine uma base ortonormal β de autovetores de A tal que a matriz de A na base β seja a matriz D obtida no item anterior.

Respostas: Para simplificar os cálculos consideraremos a matriz $B = 3\,A$. Observe que a matriz B tem os mesmos autovetores que a matriz A e seus autovalores são os autovalores de A multiplicados por 3. Temos

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Logo 9 é um autovalor de B. Já conhecemos dois autovalores de B: 9 e (-3). Seja σ o outro autovalor. Temos

$$9 - 3 + \sigma = \text{traço}(B) = 6.$$

Logo $\sigma = 0$. Portanto, os autovalores de A são

$$3, \quad (-1), \quad 0.$$

Determinemos os autovetores associados a 0. Devem verificar a equação

$$4x + y + 5z = 0, \quad x - 2y - z = 0, \quad 5x - y + 4z = 0.$$

A última equação é a soma das duas primeiras. Portanto,

$$4x + y + 5z = 0, \quad x - 2y - z = 0, \qquad x = 2y + z.$$

Logo

$$8y + 4z + y + 5z = 0, \qquad y = -z.$$

Portanto um autovetor associado a 0 é $(1, 1, -1)$ (ortogonal a $(1, 0, 1)$).

Como a matriz é simétrica temos que

$$(1, 1, -1) \times (1, 0, 1) = (1, -2, -1)$$

é um autovetor de A, necessariamente associado a (-1) (verifique).

Em resumo, uma forma diagonal D é

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e a base ortonormal de autovetores correspondente é

$$\beta = \left\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})\right\}.$$