# P3 de Álgebra Linear I – 2004.2

Data: 19 de novembro de 2004.

## $\boxed{\textbf{Gabarito}}$

---

**1)** Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Determine os autovalores de $A$ e suas multiplicidades.

**(b)** Para cada autovalor $\lambda$ de $A$ determine o número máximo de autovetores linearmente independentes que existem e mostre um conjunto de tais autovetores.

**(c)** Decida se $A$ é diagonalizável. Em caso afirmativo determine uma forma diagonal $D$ de $A$.

**(d)** Encontre, se possível, uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que a matriz de $A$ na base $\beta$ seja

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Resposta:** O polinômio característico de $A$ é:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\,(1-\lambda)\,(2-\lambda) - (-1\,(2-\lambda)+1) =$$

$$= (-\lambda)\,(\lambda^2 - 3\,\lambda + 2) + 1 - \lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 3\,\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3.$$

Portanto, 1 é o único autovalor que tem multiplicidade 3.

Para determinar os autovetores de 1 devemos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 0-1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, o sistema

$$-x+y=0 \quad -x+z=0, \quad -x+z=0.$$

As soluções são da forma $(t,t,t)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, somente é possível encontrar um autovetor linearmente independente. Por exemplo, $(1,1,1)$.

A matriz não é diagonalizável: não existe uma base de autovetores.

Procuramos uma base $\beta = \{u, v, w\}$ tal que

$$A(u) = u+v, \quad A(v) = v+w, \quad A(w) = w.$$

Portanto, $w$ é um autovetor de $A$ associado a 1. Podemos escolher $(1,1,1)$.

Portanto,

$$A(v) = v + (1,1,1).$$

Em coordenadas temos $v = (x,y,z)$ (na base canônica):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$y = x+1, \quad -x+y+z = y+1, \quad -x+2z = z+1.$$

Ou seja,

$$-x+y=1, \quad -x+z=1, \quad -x+z=1.$$

Podemos escolher o vetor $v = (0,1,1)$.

Finalmente,

$$A(u) = u+v = u+(0,1,1).$$

Em coordenadas temos $u = (x, y, z)$ (na base canônica):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$y = x + 0, \quad -x + y + z = y + 1, \quad -x + 2z = z + 1.$$

Ou seja,

$$-x + y = 0, \quad -x + z = 1, \quad -x + z = 1.$$

Podemos escolher o vetor $u = (0, 0, 1)$.

Portanto,

$$\beta = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}.$$

Verifique

$$\begin{aligned} A(0,0,1) &= (0,1,2) = (0,0,1) + (0,1,1), \\ A(0,1,1) &= (1,2,2) = (0,1,1) + (1,1,1), \\ A(1,1,1) &= (1,1,1). \end{aligned}$$

---

**(2)** Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\},$$

$$\gamma = \{(1/3, 2/3, 2/3), (2/3, -2/3, 1/3)(2/3, 1/3, -2/3)\}.$$

Determine:

**(a)** A matriz $M$ de mudança de coordenadas da base canônica para a base $\beta$.

**(b)** As coordenadas do vetor $(1, 2, 3)$ na base $\beta$.

**(c)** A primeira coluna da matriz de mudança de coordenadas da base $\beta$ para a base $\gamma$.

**Resposta:** A matriz $N$ de mudança de coordenadas base $\beta$ para a base canônica é

$$N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, $M = N^{-1}$. Como $N$ é uma matriz ortogonal (as colunas são vetores de uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$) temos que $M = N^t$, isto é,

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar as coordenadas de $(1,2,3)$ na base $\beta$ podemos usar dois métodos. Primeiro aplicar a matriz de mudança de coordenadas da base canônica para a base $\beta$:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/\sqrt{6} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Outra possibilidade é observar que se $(1,2,3)_\beta = (a,b,c)$ então

$$(1,2,3) = a\,(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) + b\,(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) + c\,(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0).$$

Como a base é ortonormal, se verifica:

$$\begin{array}{l} (1,2,3) \cdot (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) = 9/\sqrt{6} = a, \\ (1,2,3) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = 0 = b, \\ (1,2,3) \cdot (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = -1/\sqrt{2} = c. \end{array}$$

Portanto,

$$(1,2,3)_\beta = (9/\sqrt{6}, 0, -1/\sqrt{2}).$$

Para determinar a mudança de coordenadas da base $\beta$ para a base $\gamma$ efetuaremos os cálculos em duas etapas:

- Determinaremos a matriz de mudança de coordenadas da base $\beta$ para a canônica, esta matriz é $N$.

- Determinaremos a matriz de mudança de base da base canônica para a base $\gamma$, esta matriz é

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

- A matriz procurada é

$$PN = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

A primeira coluna da matriz é:

$$\begin{pmatrix} 7/3\sqrt{6} \\ 2/3\sqrt{6} \\ -1/3\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

---

**(3)**

**(a)** Considere a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & b & e \\ -1/3 & c & f \\ a & d & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Determine $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ e $\mathbf{f}$ para que a matriz $P$ represente, na base canônica, uma projeção ortogonal em uma reta paralela a um vetor da forma $(t, 1, 1)$ para certo $t \in \mathbb{R}$.

**(b)** Considere a matriz

$$E = \begin{pmatrix} 2/3 & n & r \\ 1/3 & p & s \\ m & q & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Determine $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ para que a matriz $E$ represente, na base canônica, um espelhamento em um plano.

**(c)** Determine o plano de espelhamento do item (b).

**Resposta:** Para determinar a matriz $P$ observe que:

1. $P(\mathbf{i}) = (1/3, -1/3, a)$ deve ser paralelo a $(t, 1, 1)$. Portanto $(1/3, -1/3, a) = \lambda\,(t, 1, 1)$. Logo $\lambda = -1/3$. Portanto, $a = -1/3$.
2. Como $P$ é simétrica: $b = -1/3$ e $e = -1/3$.
3. Como $(-1/3, c, d)$ deve ser paralelo a $(1/3, -1/3, -1/3)$, temos $c = 1/3$ e $d = 1/3$. Logo, por simetria, $f = 1/3$.
4. Confira que a matriz tem traço igual a 1.

Portanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Para determinar a matriz $E$ observe que:

1. A matriz $E$ deve ser ortogonal. Portanto, $m = \pm 2/3$. Escolhamos $m = 2/3$.
2. Como $E$ é simétrica: $r = 2/3$ e $n = 1/3$.
3. Como $E$ é ortogonal, $s = -2/3$ (as colunas primeira e terceira devem ser ortogonais). Portanto, como $E$ é simétrica, $q = -2/3$.
4. Finalmente, como o traço de $E$ é 1, deveremos ter $p = 2/3$ (veja que o resultado é uma matriz ortogonal).

Portanto,

$$E = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Para calcular o plano $\pi$ de espelhamento temos duas possibilidades: ver que se $v$ não é um vetor do plano $\pi$ então $A(v) - v$ é um vetor ortogonal ao plano de espelhamento. Escolhendo $v = (1, 0, 0)$ temos

$$E(1, 0, 0) = (2/3, 1/3, 2/3) - (1, 0, 0) = (-1/3, 1/3, 2/3).$$

Ou seja o plano é

$$x - y - 2z = 0.$$

Verifique que $E(-1/3, 1/3, 2/3) = -(-1/3, 1/3, 2/3)$.

Outra solução é encontrar os autovetores associados ao autovalor 1:

$$\begin{pmatrix} 2/3-1 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3-1 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$-x/3 + y/3 + 2z/3 = 0, \quad x/3 - y/3 - 2z/3 = 0, \quad 2x/3 - 2y/3 - 4z/3 = 0,$$

obtendo o mesmo resultado que anteriormente.

---

**(4)** As matrizes $M$ e $N$ a seguir representam, na base canônica, cisalhamentos, multiplicações por um escalar, projeções ortogonais em retas ou planos, espelhamentos em retas ou planos, rotações, ou composições destas transformações lineares.

Determine de que tipo de transformação linear se trata em cada caso. Quando a transformação linear (ou a composição) envolver projeções, determine o plano ou a reta de projeção. Quando envolver espelhamentos, determine o plano ou a reta de espelhamento. Quando envolver rotações, determine o eixo e o $\cos\alpha$ do ângulo $\alpha$ de rotação.

**(a)**

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

**(b)**

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Lembre que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Resposta:** Observe primeiro que se

$$A = PDP^t,$$

onde $P$ é uma matriz ortogonal e $D$ é uma matriz diagonal, os autovalores de $A$ são os elementos da diagonal e os autovetores são os vetores coluna de $P$ (onde o $k$-ésimo vetor coluna é o autovetor associado ao $k$-ésimo elemento da diagonal). Portanto:

- os autovalore de $M$ são $(-1)$ simples, cujo autovetor associado é $(-2, 1, -1)$, e 1 de multiplicidade dois, cujos autovetores associados são (por exemplo) $(1, 1, -1)$ e $(0, 1, 1)$. Portanto, $M$ representa um espelhamento no plano $2x - y + z = 0$.

- Considere a base formada pelos vetores coluna da matriz $P$,

$$\begin{aligned} \beta = \quad & \{u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), \\ & v = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}), \\ & w = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}. \end{aligned}$$

A matriz de $N$ na base $\beta$ é

$$[N]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos,

$$[N]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $N$ é a composição das transformações lineares $A$ e $B$ cujas matrizes na base $\beta$ são:

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [B]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que

- $A$ representa uma projeção ortogonal no plano de vetor normal $w$,
- $B$ representa um espelhamento no plano de vetor normal $v$.

Portanto, $N$ representa o espelhamento no plano $2x - y + z = 0$ seguido de uma projeção ortogonal no plano $y + z = 0$.