Gabarito da P3 de Algebra linear I, tipo A

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ache os autovalores de A.
(b) Ache uma base de autovetores ortogonais de A caso exista.
(c) É possıvel achar uma matriz B tal que $B^{-1}AB$ seja uma matriz diagonal? Caso afirmativo, escreva a matriz B.
(d) Ache a inversa da matriz B do item anterior.
(e) Calcule A^5 (Sug.: $5^4 = 625$).

Não precisa justificar as respostas.
Escreva suas respostas nos espaços a seguir a caneta.

a: Autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$.

b: Uma base de autovetores ortogonais existe porque a matriz é simétrica. Uma base possível é

$$v_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}),$$

$$v_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

O vetor v_1 satisfaz $A(v_1) = 0$, e o vetor v_2 satisfaz $A(v_2) = 5v_2$.

c: Uma matriz que diagonaliza A é

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

A forma diagonal da matriz A na base associada a B é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

d: A inversa da matriz B é sua transposta, porque B é ortogonal.

e: A^5 pode ser calculado pelo produto

$$BD^5B^{-1} = 5^4 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

o que é igual a $5^4 A$.

(2) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(a) A matriz M representa um espelhamento, uma projeção ortogonal, ou nenhuma das anteriores? **Justifique sua resposta**.

(b) Caso M seja espelhamento ou uma projeção, escreva a equação do plano ou reta no qual se faz o espelhamento ou projeção.

(c) Ache M^{5001} e M^{5550}.

(d) Ache uma base β de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz $[M]_\beta$ seja diagonal e escreva a forma diagonal nessa base.

Não precisa justificar as respostas dos itens b, c, d.
Escreva suas respostas nos espaços a seguir a caneta.

a: A matriz representa um espelhamento porque é uma matriz simétrica o ortogonal.

b: Observamos que o traço da matriz M é -1, e como seus autovalores so podem ser 1 ou -1 com multiplicidade, concluimos que 1 é autovalor de M com multiplicidade 1 e que -1 é autovalor com multiplicidade 2. Portanto, M representa um espelhamento com relação a uma reta. A reta é gerada por um autovetor associado ao autovalor 1, por exemplo $v = (2, 1, 1)$. Uma equação paramétrica da reta é $r(t) = t(2, 1, 1)$.

c: Como M é um espelhamento, sabemos que $M^2 = I$, e portanto,

$$M^{5001} = M^{5000+1} = M^{5000}M = (M^2)^{2500}M = M.$$

Da mesma forma, $M^{5550}M = (M^2)^{2275} = I$.

d: Uma base de autovalores de M seria formada por $v = (2,1,1)$ e um par de vetores no plano π ortogonal a v que sejam linearmente independentes. O plano π tem equação $2x+y+z=0$, e um par de geradores desse plano é $v_2 = (1,0,-2)$, $v_3 = (0,1,-1)$. Portanto, uma base na qual M é diagonal é $v_1 = v$, v_2, v_3. A forma diagonal de M nessa base é

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Seja A a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(a) A matriz A representa uma rotação, **justifique**.
(b) Ache o eixo da rotação A.
(c) Qual é o coseno do ângulo da rotação A?

Não precisa justificar as respostas dos itens b, c. Escreva as respostas a caneta.

a: A matriz A representa uma rotação porque é uma matriz ortogonal (as linhas são ortogonais entre sim e tem norma 1) que não é simétrica.

b: O eixo da rotação é uma reta gerada por um autovetor do autovalor 1. Por exemplo,

$$v = \left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}), \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, 1\right)$$

é um autovetor associado a 1.

c: O ângulo de rotação de A pode ser calculado usando o traço da matriz, que é igual a $(\sqrt{5}-8)/3\sqrt{5}$. O coseno é portanto,

$$cos(\alpha) = \frac{1}{2}(tr(A) - 1) = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

(4) Considere a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Escreva o polinomio caracteristico de N.
(b) Ache os autovalores de N.
(c) Caso $\lambda = 1$ seja autovalor de N, ache todos os autovetores associados a $\lambda = 1$.
(d) Existe uma matriz inversıvel B tal que $B^{-1}NB$ é diagonal? **Justifique sua resposta**.
(e) Existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}NP$ é diagonal? **Justifique sua resposta**.

Não precisa justificar as respostas dos itens a, b, c. Escreva as respostas a caneta.

a: O polinomio é $p(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$.

b: Os autovalores de N são as raizes do polinomio $p(x)$.

c: Os autovetores de $\lambda = 1$ são $v(t) = t(2, 3, 2)$.

d: Sim existe uma matriz que diagonaliza N, já que os autovalores de N são distintos e portanto, uma base de autovetores de N define uma base na qual a matriz que representa N é diagonal.

e: Não existe mudança de base ortogonal que diagonalize N dado que N não é simétrica, e esta propriedade caracteriza as matrizes simétricas.