P3 de Álgebra Linear I – 2003.1
Data: 18 de junho de 2003.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		F	
1.b		F	
1.c	V		
1.d	V		
1.e	V		
1.f		F	
1.g		F	
1.h	V		
1.i		F	
1.j		F	

1.a) Seja A uma matriz simétrica 3×3 cujo determinante é zero e cujo traço é 2, então A representa uma projeção ortogonal em um plano.

Falso: Considere por exemplo as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.b) O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

Falso: Considere, por exemplo, os produtos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.c) A inversa de uma matriz é uma matriz simétrica.

Verdadeiro: Uma matriz simétrica está caraterizada pela propriedade de *ter uma base ortogonal de autovetores.* Como uma matriz e sua simétrica têm os mesmos autovetores, a inversa de uma matriz simétrica também possui uma base ortogonal de autovetores (a mesma da matriz A), portanto é simétrica.

1.d) A matriz

$$A=\begin{pmatrix} 555555 & 666666 & 777777 \\ 666666 & 888888 & 999999 \\ 777777 & 999999 & 1111111111111 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Verdadeiro: A matriz A é uma matriz simétrica, portanto diagonalizável.

1.e) A matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2222 & 3333 & 5555 \\ 4444 & 6666 & 11110 \\ 6666 & 9999 & 16665 \end{pmatrix}$$

tem autovalores 0 (de multiplicidade 2) e $2222+6666+16665=25553$.

Verdadeiro: Como as linhas da matriz são proporcionais (a segunda linha é obtida multiplicando por dois a primeira, e a terceira linha é obtida multiplicando por três a primeira), o determinante é nulo. Como o determinante é o produto dos autovalores (contados com multiplicidade), existe um autovalor nulo. Os autovetores associados a 0 são os vetores não nulos do plano

$$222\,x+333\,y+555\,z=0,$$

ou seja, há dois autovetores l.i. associados ao autovalor 0, e portanto a multiplicidade de 0 é no mínimo 2. Não pode ser 3. pois em tal caso o traço da matriz seria nulo, ou seja, a multiplicidade de 0 é 2. Logo falta por determinar um autovalor, para isso usamos que a soma dos autovalores contados com multiplicidade é o traço, temos que, se λ é o terceiro autovalor,

$$0+0+\lambda = 222+666+16665 = 25553,$$

o que prova a afirmação.

1.f) Seja A uma transformação linear ortogonal de $\mathbb{R}^3$, então, para todo par de vetores v e w de $\mathbb{R}^3$, se verifica

$$A(v) \times A(w) = v \times w.$$

Falso: Considere o espelhamento A no plano $\mathbb{XY}$ (ou seja, de vetor normal $\mathbf{k}$). Temos

$$A(\mathbf{i}) = \mathbf{i}, \quad A(\mathbf{k}) = -\mathbf{k},$$

e

$$A(\mathbf{i}) \times A(\mathbf{k}) = \mathbf{i} \times (-\mathbf{k}) = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} \neq \mathbf{i} \times \mathbf{k},$$

ou seja $A(\mathbf{i}) \times A(\mathbf{k}) \neq \mathbf{i} \times \mathbf{k}$.

1.g) Duas matrizes 2×2 com o mesmo polinômio característico, o mesmo traço e o mesmo determinante são semelhantes.

Falso: Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\det(A) = \det(B) = 1, \quad \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 2,$$

e os polinômios caraterísticos são $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2$.

1.h) Seja A uma matriz simétrica 3×3 cujo determinante é 15. Suponha que 1 e 3 são autovalores de A. Então o traço de A é 9.

Verdadeiro: Seja σ o terceiro autovalor de A (como a matriz é simétrica tal autovalor é real). O determinante é igual ao produto dos autovalores, portanto,

$$15 = (1)(3)\sigma, \quad \sigma = 5.$$

Como o traço é a soma dos autovalores,

$$1+3+5=9.$$

1.i) Considere a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix},$$

como os vetores coluna são unitários e o primeiro vetor $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ é ortogonal aos outros vetores coluna $(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ e $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ a matriz A é ortogonal.

Falso: Para a matriz ser ortogonal todos os vetores coluna devem ser ortogonais, mas os vetores coluna segundo e terceiro não são ortogonais:

$$(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) \cdot (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = 3/\sqrt{12} \neq 0.$$

1.j) Sejam A, B e C matrizes 3×3 simétricas não nulas tais que os $AB = AC$, então $B = C$.

Falso: Considere a matriz A de uma projeção ortogonal em um plano. Considere $B = Id$ e $C = A$, então

$$A\,B = A\,(Id) = A = A^2 = A\,C.$$

2) Escolha qual das afirmações a seguir é a verdadeira e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.5, cada resposta **N** vale 0, cada duas respostas erradas o aluno perde -0.1 pontos. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão -0.1.

2.1) A matriz A

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

representa

(a) O espelhamento no plano $x + y = 0$.

(b) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(c) O espelhamento no plano $x - y + z = 0$.

(d) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(e) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

(f) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

(g) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, -t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(h) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

(i) Uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo de rotação a reta $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
2.1									x		

Resposta: A matriz A é semelhante à matriz

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que representa uma rotação. Portanto, as opções (a)–(e) estão descartadas.

Observe que $A = PRP^{-1} = PRP^t$, onde P é uma matriz ortogonal. Interpretando P como uma matriz de mudança de base, temos que R representa a matriz de A na base ortonormal

$$\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\},$$

o seja, A é uma rotação de eixo $(t,-t,t)$ e ângulo $\pi/4$ (opção (i)).

Para fazer as eliminações v. poderia raciociar como segue, as matrizes A e R são semelhantes, portanto têm o mesmo traço, ou seja $1+\sqrt{2}$. Como projeções em planos têm traço 2 e espelhamentos em planos traço 1, estas opções estão eliminadas.

2.2) A matriz B

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

representa

(a) O espelhamento no plano $x+y=0$.

(b) O espelhamento no plano $x-y-2z=0$.

(c) O espelhamento no plano $x-y+z=0$.

(d) A projeção ortogonal no plano $x-y+z=0$.

(e) A projeção ortogonal no plano $x+y=0$.

(f) A projeção ortogonal no plano $x-y-2z=0$.

(g) A projeção ortogonal no plano $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0$.

(h) O espelhamento no plano $x+y=0$ seguido da projeção ortogonal no plano $x-y+z=0$.

(i) A transformação $T(u) = u \times v$, onde $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
2.2						x					

Resposta: A matriz B é semelhante à matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que representa uma projeção em um plano. Portanto, as opções (a)–(c) e (h)–(i) estão descartadas.

Observe que $A = PRP^{-1}$, onde P é uma matriz ortogonal. Interpretando P como uma matriz de mudança de base, temos que D representa a matriz de A na base ortonormal

$$\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\},$$

o seja, A é uma projeção no plano de vetor normal $(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$, ou seja, no plano $x - y - 2z = 0$, (opção (f)).

Para fazer as eliminações v. poderia raciociar como segue, as matrizes B e D são semelhantes, portanto têm o mesmo traço, ou seja 2. Como espelhamentos em planos têm traço 2 e espelhamentos em planos traço 1, estas opções estão eliminadas. A possibilidade (i) está eliminada, pos T não é diagonalizável.

2.3) A matriz C

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

representa:

(a) O espelhamento no plano $x + y = 0$.

(b) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(c) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$ seguida do espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(d) O espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(e) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

(f) A projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$ seguida do espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$.

(g) A projeção ortogonal no plano $x - y + z = 0$.

(h) A projeção ortogonal no plano $x - y - 2z = 0$ seguida do espelhamento no plano $x + y = 0$.

(i) A transformação $T(u) = u \times v$, onde $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
2.3			x								

Resposta: A matriz C é semelhante à matriz

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

observando que

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

temos que D representa uma projeção em um plano seguida de um espalhamento. Portanto, as opções (a),(b),(d),(e),(g) e (i) estão descartadas.

Observe que $A = PDP^{-1}$, onde P é uma matriz ortogonal. Interpretando P como uma matriz de mudança de base, temos que D representa a matriz de A na base ortonormal

$$\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\},$$

o seja, A é uma projeção no plano de vetor normal $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ (o plano $x + y = 0$) seguida de um espelhamento no plano $x - y - 2z = 0$, (opção (c)).

Para fazer as eliminações v. poderia raciociar como segue, as matrizes C e D são semelhantes, portanto têm o mesmo traço, ou seja 0. Como espelhamentos e projeções em planos têm traço diferente de 0, estas opções estão eliminadas. A possibilidade (i) está eliminada, pos T não é diagonalizável.

2.4) A matriz D

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representa:

(a) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

(b) A projeção ortogonal no plano $-x - 2y + z = 0$.

(c) A projeção ortogonal no plano $x + y = 0$ seguida do espelhamento no plano $-x - 2y + z = 0$.

(d) A projeção ortogonal no plano $x - y - z = 0$.

(e) A projeção no plano $x - y - z = 0$ na direção do vetor $(1, 2, 0)$.

(f) A projeção no plano $x - y - z = 0$ na direção do vetor $(1, 1, 0)$.

(g) O espelhamento no plano $x - y - z = 0$ na direção do vetor $(1, 2, 0)$.

(h) Uma projeção na reta de equações cartesianas $x+y = 0$ e $-x-2y+z = 0$.

(i) A projeção na reta de equações cartesianas $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ na direção do vetor $(-1, -2, 1)$.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**N**
2.4					x						

Resposta: A matriz D tem traço 2 e determinante nulo. Assim projeções em retas (traço 1) e espelhamentos (traço 1 e determinante nulo) estão eliminados (opçõoes (g)–(i)).

Como a matriz não é simétrica, as projeções ortogonais estão descartadas (opções (a)–(d)).

Portanto, somente temos as opções (e) e (f). Na opção (f), deveriamos ter $D(1,1,0)=0$, mas $D(1,1,0)=(1,1,0)$. Portanto, (f) está eliminada.

Na opção (e), deveriamos ter $D(1,2,0)=0$ (o que de fato acontece) e dois vetores l.i. do plano $x-y-z=0$, por exemplo $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$, transformados neles próprios, o que de fato acontece (verifique). Portanto, a opção (e) é a verdadeira.

3) Seja R uma rotação de $\mathbb{R}^3$ de 45 graus e eixo a reta (at, bt, ct), $t\in\mathbb{R}$, e P uma projeção ortogonal em um plano π contendo o eixo de rotação de R.

3.a) Determine os autovalores da transformação linear $P\circ R$.

3.b) Determine dois autovetores linearmente independentes de $P\circ R$.

3.c) Estude se $P\circ R$ é diagonalizável e em caso afirmativo determine uma forma diagonal de $P\circ R$.

Dica: escreva as tranformações lineares em uma base conveniente, por exemplo, em uma base ortonormal contendo o vetor diretor do eixo de rotação e um vetor do plano de projeção...

Resposta: Considere uma base ortogonal formada pelo vetor diretor v do eixo de rotação, o vetor diretor w da reta obtida como interseção do plano de projeção π e o plano ρ de vetor normal v, e um terceiro vetor $\ell = v\times w$. Os vetores w e ℓ geram o plano ρ de vetor normal v, e ℓ é o vetor normal do plano de projeção π. Na base $\beta=\{v,w,\ell\}$ temos que que as matrizes de P e R são:

$$[P]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [R]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz de $P \circ R$ na base β é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Portanto, a matriz A é semelhante à matriz de $P \circ R$, logo têm os mesmos autovalores. Como a matriz é triangular, seus autovalores são $1, \sqrt{2}/2$ e 0. Como os três autovalores são distintos, seus autovetores são l.i. e formam uma base. Portanto, $P \circ R$ é diagonalizável e sua forma diagonal é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para determinar dois autovetores l.i. de $P \circ R$, você pode raciocinar geometricamente ou observar, usando a expressão de $P \circ R$ na base β,

$$[P \circ R]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que

$$[P \circ R]_\beta (1,0,0)_\beta = (1,0,0)_\beta, \quad [P \circ R]_\beta (0,1,0)_\beta = (0, \sqrt{2}/2, 0)_\beta,$$

como $(1,0,0)_\beta = v$ e $(0,0,1)_\beta = w$, obtemos os dois autovetores l.i.

O raciocínio geométrico é o seguinte, considere o vetor diretor do eixo de rotação, como $R(v) = v$, $P \circ R(v) = P(v)$, como v está no plano de projeção, $P(v) = v$, logo $P \circ R(v) = v$. A respeito do vetor w observe que $P \circ R(w)$ é paralelo a w (faça uma figura).

4) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de A.

b) Determine uma base β de autovetores de A.

c) Determine a matriz de A na base β.

d) Encontre, se possível, uma forma diagonal de A.

e) Encontre uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$.

f) Interprete P.

Resposta: O polinômio característico de A é:

$(5-\lambda)((-4-\lambda)(6-\lambda)+24) = (5-\lambda)(-24+\lambda^2-2\lambda+24) = (5-\lambda)(\lambda)(\lambda-2)$.

Portanto, os autovalores são 5, 0 e 2.

Para obter autovetores resolvemos os sistemas:

- $(A-5I)X = 0$, que fornece os autovetores associados a 5, os vetores da forma $(1t, 0, 2t)$, $t \neq 0$,
- $(A)X = 0$, que fornece os autovetores associados a 0, os vetores da forma $(0, 1t, -2t)$, $t \neq 0$,
- $(A-2I)X = 0$, que fornece os autovetores associados a 2, os vetores da forma $(0, 1t, -3t)$, $t \neq 0$.

Portanto, uma base β de autovetores de A é

$$\{(1,0,2), (0,1,-2), (0,1,-3)\}.$$

Uma forma diagonal de A é

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

De fato, esta matriz é a matriz de A na base β.

A matriz P é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

A matriz P representa a mudança de base da base β à base canônica.

5) Seja A uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de A na base canônica é simétrica e tem determinante zero e traço 2. Sabendo que $A(1,1) = (0,0)$:

(5.a) Determine os autovalores de A.

(5.b) Determine uma base de autovetores de A.

(5.c) Determine a matriz A.

Resposta: Um autovalor de A é 0 (pois $A(1,1) = (0,0) = 0(1,1)$). O traço de A é 2, e como ele é igual à soma dos autovalores (contados com multiplicidade) de A, se λ é o outro autovalor de A, temos:

$$0 + \lambda = 2, \quad \lambda = 2.$$

Como A é simétrica, os autovetores de A associados a 0 e 2 são ortogonais, portanto, os autovetores associados a 2 são ortogonais a $(1,1)$, logo um autovetor associado a 2 é $(1,-1)$. Portanto, uma base de autovetores de A é $\{(1,1)(1,-1)\}$.

Finalmente, para determinar a matriz de A escrevemos A na base ortonormal β de autovetores $\{(2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}), (2/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2})\}$,

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, é suficiente considerar a matriz P ortogonal de mudança da base β à canônica

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

e escrever

$$\begin{aligned} A &= P[A]_\beta P^{-1} = P[A]_\beta P^t = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Verifique que a matriz A está certa (o resultado é coerente: simétrica, traço 2 e determinante nulo).