P3 de Álgebra Linear I – 2002.1
Data: 7 de junho de 2002.

Gabarito

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

1.a) Seja A uma matriz simétrica inversível. Então sua inversa também é simétrica.

Verdadeiro: Observe que todo autovetor u de A é autovetor de A^{-1} (se $A(u) = \lambda\, u$ então $A^{-1}(u) = \lambda^{-1}\, u$). Portanto, como A é simétrica, possui uma base ortonormal de autovetores, que também são autovetores de A^{-1}, e isto carateriza ser simétrica.

Outra forma de justificar, seja B a inversa de A. Então $AB = I = BA$. Logo

$$(AB)^t = I^t = (BA)^t, \quad B^t A^t = I = A^t B^t.$$

Mas $A^t = A$, logo $B^t A = I$, donde

$$B^t = B^t AB = IB = B.$$

1.b) A multiplicação de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

Falso: Considere o produtos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.c) Sejam A uma matriz 3×3 e D uma matriz diagonal tais que $A = PDP^{-1}$ (onde P é uma matriz 3×3 inversível). Então A é simétrica.

Falso: Existem matrizes que são diagonalizáveis (ou seja, satisfazendo o enunciado) que não são simétricas. Por exemplo, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável (possui três autovalores diferentes, 1, 2 e 3) e não é simétrica.

Ou de outra forma,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.d) Seja A uma matriz 3×3 diagonalizável. Suponha que $B = PAP^{-1}$ (onde P é uma matriz 3×3 inversível). Então B é diagonalizável.

Verdadeiro: É exatamente a definição matriz diagonalizável: ser semelhante a uma matriz diagonal. Observe que $A = MDM^{-1}$ onde D é diagonal, logo

$$B = PMDM^{-1}P^{-1} = (PM)D(PM)^{-1}.$$

1.e) Sejam A uma matriz 3×3 e σ e λ autovalores de A. Então $\sigma + \lambda$ é um autovalor de A.

Falso: Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos que 1 e 2 são autovalores e que $1 + 2 = 3$ não é autovalor.

1.f) Seja R uma rotação de $\mathbb{R}^3$ de ângulo α e eixo de rotação a reta r que contém a origem. Então, para todo vetor não nulo u de $\mathbb{R}^3$, se verifica que o ângulo entre u e $R(u)$ é α.

Falso: A afirmação somente é verdadeira se o vetor é perpendicular ao eixo de rotação. Por exemplo, se u é paralelo ao eixo, independentemente do ângulo de rotação, se verifica $R(u) = u$. Portanto, o ângulo entre u e $R(u)$ é zero.

1.g) Seja A uma matriz ortogonal 3×3. Então o determinante de A é ± 1.

Verdadeiro: Sejam u, v e w os vetores coluna da matriz. Então, o valor absoluto do determinante de A é $|u \cdot (v \times w)|$, que é o volume do paralelepípedo de arestas u, v e w. Como estes vetores são ortogonais e unitários, dito volume é 1.

Outra forma,

$$A^t A = I, \quad |A|^2 = |A^t||A| = |I| = 1.$$

Logo $|A| = \pm 1$.

1.h) Seja A uma matriz diagonalizável. Então A^3 também é diagonalizável.

Verdadeiro: É suficiente provar que existe uma base de autovetores de A^3. Como A é diagonalizável, existe uma base de autovetores de A, $\beta = \{u, v, w\}$ com $A(u) = \lambda\, u$, $A(v) = \sigma\, v$ e $A(w) = \tau\, w$ (onde λ, σ e τ não são necessariamente diferentes). Temos $A^3(u) = \lambda^3\, u$, $A^3(v) = \sigma^3\, v$ e $A^3(w) = \tau^3\, w$. Portanto, u, v e w são autovetores de A^3, assim β é uma base de autovetores de A^3 e A^3 é diagonalizável.

Outra forma,

$$A = PDP^{-1}, \quad A^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}, = PD^3P^{-1}.$$

Como D^3 é diagonal, se segue a afirmação.

1.i) Seja A uma matriz 2×2 ortogonal e simétrica. Então A é a identidade ou representa um espelhamento.

Falso: Considere

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	v		
1.b		f	
1.c		f	
1.d	v		
1.e		f	
1.f		f	
1.g	v		
1.h	v		
1.i		f	

2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Determine

(2.a) a, b e c para que A represente uma projeção ortogonal,

(2.b) a, b e c para que A represente um espelhamento,

(2.c) a, b e c para que A represente uma rotação.

Considere agora a matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & a & b \\ 1/3 & c & d \\ 1/3 & e & f \end{pmatrix}.$$

(2.d) Determine a, b, c, d, e e f para que B represente uma projeção ortogonal em uma reta.

(2.e) Determine a reta de projeção de B.

Resposta: No caso da projeção. A matriz tem traço 1 (a soma dos autovalores 1 e 0). Logo $c = 1/2$. Como a matriz é simétrica, temos $a = b$. Como tem determinante zero, temos $a^2 = 1/4$. Logo $a = \pm 1/2$. Logo existem duas possibilidades,

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Para o espelhamento, a matriz tem traço 0 (a soma dos autovalores 1 e -1). Logo $c = -1/2$. Como a matriz é simétrica, temos $a = b$. Como é ortogonal, temos $b = \pm\sqrt{3}/2$. Logo existem duas possibilidades,

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para o caso da rotação, a matriz deve ser ortogonal e não simétrica. Portanto, pelos argumentos acima, temos duas possibilidades,

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Para a matriz 3×3. Como se trata de uma projeção ortogonal, a matriz deve ser simétrica. Ou seja $a = b = 1/3$. Como se trata de uma projeção em uma reta, temos que $(a, c, e) = \lambda(1/3, 1/3, 1/3)$ e $(b, d, f) = \sigma(1/3, 1/3, 1/3)$. De $a = b = 1/3$ obtemos $\lambda = \sigma = 1$. Logo

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como $B(1, 0, 0) = (1/3, 1/3, 1/3)$ é paralelo à reta r de projeção, temos $r = (t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1), \quad T(1, 1, -2) = (1, 1, -2).$$

Sabendo que a matriz de T é simétrica e possui determinante zero:

(3.a) Determine os autovalores de T.

(3.b) Determine uma base de autovetores de T.

(3.c) Escreva T da forma $T = PDP^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal.

(3.d) Calcule explicitamente T^{1000}.

Resposta: Das hipóteses $T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) = -1(1, 1, 1)$ e $T(1, 1, -2) = (1, 1, -2)$ temos que 1 e -1 são autovalores. Como o determinante é nulo e é igual ao produto dos autovalores, o terceiro autovalor é 0.

Já conhecemos dois autovetores. Como a matriz é simétrica, o terceiro autovalor deve ser perpendicular aos outros dois, ou seja, paralelo a $(1,1,1) \times (1,1,-2) = (-3,3,0)$. Logo uma base de autovetores é $\beta = \{(1,1,1),(1,1,-2),(1,-1,0)$.

Escolhendo a base ortonormal de autovetores

$$\gamma = \{(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6}),(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0).$$

Observe que na base γ a matriz de T é diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$[T] = PDP^{-1},$$

onde

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como P é ortogonal, temos

$$P^{-1} = P^t.$$

Finalmente,

$$T^{1000} = PD^{1000}P^{-1}.$$

Observe que

$$D^{1000} = \begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & (1)^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
T^{1000} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1/3+1/6 & 1/3+1/6 & 1/3-2/6 \\ 1/3+1/6 & 1/3+1/6 & 1/3-2/6 \\ 1/3-2/6 & 1/3-2/6 & 1/3+4/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Veja que o resultado é coerente: uma matriz simétrica com traço 2.

4) Determine quais das matrizes a seguir são diagonalizáveis. Nos caso afirmativos encontre uma base de autovetores e uma forma diagonal das matrizes.

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Resposta: A matriz A é triangular. Seus autovalores são os elementos da diagonal, ou seja, 1, 2 e 3. Como são diferentes, é diagonalizável, e sua forma diagonal é

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Seus autovetores são as soluções não triviais dos seguintes sistemas:

$\lambda = 1$,

$$
x = x, \quad x + 2y = y, \quad x + y + 3z = z.
$$

Uma solução não trivial é $(1, -1, 0)$.

$\lambda = 2$,

$$
x = 2x, \quad x + 2y = 2y, \quad x + y + 3z = 2z.
$$

Uma solução não trivial é $(0, 1, -1)$.

$\lambda = 3$,

$$
x = 3x, \quad x + 2y = 3y, \quad x + y + 3z = 3z.
$$

Uma solução não trivial é $(0, 0, 1)$.

Logo uma base de autovetores é $\beta = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$.

A matriz B é simétrica. Portanto, é diagonalizável. Seu polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^2(1 - \lambda) + \lambda = \lambda(\lambda - \lambda^2 + 1).$$

Ou seja, os autovalores são 0 e $1/2(1 \pm \sqrt{5})$. Verificamos que uma base de autovetores é

$$\{(0, 1, 0), ((1 + \sqrt{5})/2, 0, 1)((1 - \sqrt{5})/2, 0, 1)\}.$$

Finalmente, sua forma diagonal é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{5})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1-\sqrt{5})/2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, a matriz C é triangular. Seus autovalores são os elementos da diagonal, ou seja, 1 (duplo) e 2. Para calcular os autovetovetores associados a 1 resolvemos

$$x + y = 0.$$

Que fornece dois autovetores l.i. $(0, 0, 1)$ e $(1, -1, 0)$. Finalmente, para os autovetores associados a 2 resolvemos

$$-x = 0, \quad x + y - z = 0.$$

Logo $(0, 1, 1)$ é autovetor. Uma base de autovetores é

$$\{(0, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 1)\}.$$

Finalmente, uma forma diagonal é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$