P3 de Álgebra Linear I – 2001.2
Data: Sábado, 24 de novembro de 2001.
Gabarito

1) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear ortogonal. Suponha que o determinante da matriz de T na base canônica é -1 e que

$$T(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), \quad T(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}).$$

a) Determine um autovalor de T.

b) Determine $T(1, -2, 1)$.

c) Determine $T(1, 0, 0)$.

d) Determine a matriz de T em uma base ortonormal (v. escolhe a base e deve especifica-la).

Resposta: Afirmamos que (sem necessitar saber quem é T) um autovalor de T é -1. Observe que, como T é uma transformação de $\mathbb{R}^3$, seu polinômio característico tem grau 3. Portanto, tem uma raiz real (correspondendo a um autovalor de T). Como T é ortogonal, os autovalores têm módulo 1. Logo existe um autovalor real igual a 1 ou -1. Se é -1 não temos mais nada que ver. Caso contrário as possibilidades são: um autovalor 1 com multiplicidade três, ou um autovalor 1 e dois autovalores complexos (não reais) conjugados de módulo 1, digamos λ e $\bar{\lambda}$. Como o determinante de T é o produto dos autovalores (contados com multiplicidade), no primeiro caso o determinante é 1, o que é absurdo. No segundo caso o determinante vale $1\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$, o que também é absurdo.

Observe que $(1, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$ e $(1, -2, 1)$ são vetores ortogonais. Portanto, como T é ortogonal, $T(1, 1, 1)$ e $T(1, -2, 1)$ são ortogonais. Analogamente, $T(-1, 0, 1)$ e $T(1, -2, 1)$ também são ortogonais. Logo $T(1, -2, 1)$ é paralelo a $T(1, 1, 1) \times T(-1, 0, 1)$. Logo $T(1, -2, 1)$ é paralelo a $(-1, 0, 1) \times$

$(1,-2,1)=(2,2,2)$. Isto é, $T(1,-2,1)$ é paralelo a $(1,1,1)$. Portanto, como T é ortogonal, conserva módulos, e temos que

$$T(1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})=\pm(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}).$$

Devemos decidir o sinal $\pm$ (um sinal correspondera a determinante igual a 1 e o utro a determinante igual a -1).

Para isto considere a base ortonormal $\beta=\{u,v,w\}$ onde

$$\beta=\{(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})\}.$$

Observe que $T(u)=v$ e $T(v)=w$. Se $T(w)=u$ (isto é, tomamos o sinal positivo) a matriz de T na base β é

$$[T]_\beta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante da matriz anterior é 1. Observe que a matriz de T na base canônica é semelhante a $[T]_\beta$, portanto estas matrizes têm o mesmo determinante. Logo em tal caso o determinante de T é 1. O que é absurdo. Logo a matriz de T na base β é

$$[T]_\beta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ou seja,

$$T(1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})=-(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}).$$

Isto é,

$$T(1,-2,1)=-\sqrt{6}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),$$

pois $||T(1,-2,1)||=||(1,-2,1)||=\sqrt{6}$.

Observe que também resolvemos o item (d).

Finalmente, para determinar $T(1,0,0)$, escreva,

$$(1,0,0)=x(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})+y(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})+z(1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6}).$$

Como a base é ortonormal,

$$\begin{aligned} x &= (1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\cdot(1,0,0)=1/\sqrt{3},\\ y &= (-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})\cdot(1,0,0)=-1/\sqrt{2},\\ z &= (1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})\cdot(1,0,0)=1/\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} T(1,0,0) \ &= (1/\sqrt{3})\, T(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) + \\ &+(-1/\sqrt{2})\, T(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) - (1/\sqrt{6})\, T(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}). \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} T(1,0,0) = \ & (1/\sqrt{3})\, (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) + \\ &+(-1/\sqrt{2})\, (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) - (1/\sqrt{6})\, (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$T(1,0,0) = \frac{1}{\sqrt{36}} (-\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}, , -\sqrt{2} + 2\sqrt{3}, \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

2) Seja A uma matriz 3×3. Suponha que

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 3)^2 (\lambda - 2).$$

a) Estude se A é inversível.

b) Estude se A pode ser encontrada de maneira que A seja semelhante à matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

isto é, $A = PDP^{-1}$.

c) Estude se A pode ser encontrada de maneira que A seja semelhante à matriz

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Suponha agora que A é simétrica. Estude se A pode ser encontrada de maneira que seja semelhante à matriz

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resposta: A matriz A sim é inversível. Os autovalores de A são as raizes do polinômio característico. Ou seja 2 e 3 (com multiplicidade dois). Podemos ver que A é inversível de duas formas: primeiro, como A não tem autovalor zero é inversí'vel. Ou de outra forma, como o determinante de A é o produto dos autovalores contados com multiplicicade, no caso 18. Como o determinante é não nulo é inversível.

A resposta ao item (b) é negativa. Podemos ver isto de duas formas. Duas matrizes semelhantes têm o mesmo determinante. O determinante de A é 18, como vimos, o de D é 12. Logo não são semelhantes.

De outra forma, as matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade. Mas a matriz D tem o autovalor 2 com multiplicidade 2 e 3 com multiplicidade 1. Logo não são semelhantes.

Para o item (c) a resposta é novamente negativa. Um método é calcular os determinantes. Veja que o determinante de D é $16 \neq 18$.

Outra forma, veja que D tem polinômio característico $(\lambda-2)((\lambda-3)^2-1)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$. Logo seus autovalores são 4 e 2, que são diferentes dos autovalores de A. Portanto, as matrizes não são semelhantes.

Finalmente, a resposta ao item (d) é negativa. Toda matriz simétrica é diagonalizável. Portanto, A somente pode ser semelhante a matrizes diagonalizáveis. Mas a matriz D do item (d) não é diagonalizável. Seus autovalores são 3 (multiplicidade 2) e 2 (para ver isto observe que D é triangular). Mas para 3 somente podemos encontrar um autovetor linearmente independente: Os autovetores de autovalor 3 verificam $(D-3I)(v)=(0,0,0)$, ou seja

$$y=0, \quad -z=0,$$

ou seja, os autovalores são da forma $(t,0,0)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, isto é, somente é possível encontrar dois autovetores l.i. de D, logo não é diagonalizável.

3) Estude que tipo de transformações representam as matrizes.

$$A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$B=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

No casos envolvendo projeções determine a reta ou plano de projeção, nos casos envolvendo espelhamentos determine o plano ou reta de espelhamento, e nos casos envolvendo rotações determine o ângulo e o eixo de rotação.

Resposta: Observe que a matriz

$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\operatorname{sen}\pi/4 & 0 \\ \operatorname{sen}\pi/4 & \cos\pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representa, na base canônica uma rotação de ângulo $\pi/4$ em torno do eixo $\mathbb{Z}$. Analogamente, dada uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, a matriz E (na base β) representa uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo paralelo ao vetor e_3.

Considere agora a base canônica $\mathcal{E}$ e a base ortonormal γ dada por

$$\gamma = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

Observe que a matriz ortogonal

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

representa a matriz de mudança de base da base canônica à base γ.

Observe que $P^{-1} = P^t$ e que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

representa a mudança de base da base γ à base canônica. Logo

$$A = P^{-1} E P$$

representa uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo a reta $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Para a segunda matriz observe que

$$B = T\,A, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente T representa o espelhamento no plano $x = 0$. Logo B representa uma rotação de ângulo $\pi/4$ e eixo a reta $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ seguida de um espelhamento no plano $x = 0$.

Finalmente, observe que a matriz C, é simétrica, não ortogonal (o produto escalar das duas primeiras colunas é não nulo) e tem traço $1/3(2+2+2) = 6/3 = 2$. Logo a matriz C é candidata a representar uma projeção em um plano (espelhamentos e rotações correspondem a matrizes ortogonais, e projeções ortogonais em um plano têm traço 1). Em tal caso, $C(1,0,0)$ e $C(0,1,0)$ pertencem ao plano de projeção, logo $(2,-1,-1)$ e $(-1,2,-1)$ seriam dois vetores paralelos ao plano. Verifiquemos que $C(2,-1,-1) = (2,-1,-1)$ e $C(-1,2,-1) = (-1,2,-1)$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4+1+1)/3 \\ (-2-2+1)/3 \\ (-2+1-2)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2+-2+1)/3 \\ (1+4+1)/3 \\ (1-2-2)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o outro autovalor de C é zero ($\lambda = 1$ tem multiplicidade dois e o traço é 2) e o vetor normal ao plano π paralelo aos vetores acima é um autovetor (lembre que A é simétrica), este vetor é $(1,1,1)$. Logo C representa uma projeção. ortogonal no plano $x + y + z = 0$.

4)

a) Seja A uma matriz simétrica 3×3. Sabendo que $A^{2001} = -I$ (I é a matriz identidade), determine A.

b) Estude se existe uma matriz simétrica 3×3, B, tal que $B^{2000} = -I$.

c) Estude se é verdadeira a afirmação seguinte: Seja C uma matriz 3×3 tal que $C^5 = 0$. Então C é a matriz zero.

Resposta: Para o item (b) a resposta é negativa: $\det(B^{2000}) = (\det(B))^{2000}$, que é um número não negativo (2000 é par!). Mas se a matriz menos identidade 3×3 tem determinante -1. Logo não existe nenhuma matriz B tal que $B^{2000} = -I$.

Para o item (a) argumentamos como segue. Como a matriz A é simétrica é diagonalizável. Seja D uma forma diagonal de A,

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Como vimos em sala de aula,

$$D^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 & 0 \\ 0 & b^m & 0 \\ 0 & 0 & c^m \end{pmatrix}.$$

Escreva $A = PDP^{-1}$. Observe que $A^m = PD^mP^{-1}$ (como também vimos na aula). Faça $m = 2001$. Logo

$$-I = A^{2001} = P\, D^{2001}\, P^{-1}, \quad -I = P\, D^{2001}\, P^{-1}.$$

Multiplicando as duas expressoes á esquerda por P^{-1} e à direita por P,

$$-(P^{-1}\, I\, P) = (P^{-1}\, P)\, D^{2001}\, (P^{-1}\, P), \quad -I = D^{2001}.$$

Logo

$$-1 = a^{2001}, \quad -1 = b^{2001}, \quad -1 = c^{2001}.$$

A única solução é $a = b = c = -1$. Ou seja $D = -I$ e

$$A = P\, D\, P^{-1} = P\, (-I)\, P^{-1} = -(P\, P^{-1}) = -I.$$

Logo A é menos a identidade.

A resposta para o item (c) é negativa, considere por exemplo a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$C^2 = C\,C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo $C^3 = C^2\,C = 0\,C = 0$. Analogamente, $C^4 = C^5 = 0$ e C é não nula.