Prova tipo J

P2 de Álgebra Linear I – 2003.2

13 de outubro de 2003

Gabarito

1) Estude a veracidade das seguintes afirmações.

1.a) Seja $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Então

$$\gamma = \{u_1 + u_2 + u_3, u_1 + 2u_2 - u_3, 2u_1 + u_2 + 6u_3\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.b) Sejam ρ e π dois planos não paralelos de $\mathbb{R}^3$ que contém a origem (ou seja, os planos se interceptam em uma reta). Sejam $\alpha = \{v_1, v_2\}$ uma base de π e $\tau = \{w_1, w_2\}$ uma base de ρ. Então $\epsilon = \{v_1, v_2, w_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.c) Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(u + w) = T(u) + 2T(w),$$

para todo par de vetores u e w.

Resposta:

(a) Verdadeiro: Escrevemos

$$w_1 = u_1 + u_2 + u_3, \quad w_2 = u_1 + 2u_2 - u_3, \quad w_3 = 2u_1 + u_2 + 6u_3.$$

Como temos três vetores w_1, w_2, w_3 em $\mathbb{R}^3$, eles formam uma base se, e somente se, são linearmente independentes. Consideremos uma combinação linear dos vetores w_1, w_2, w_3 dando o vetor $\bar{0}$. Se a única c.l. possível é a trivial, então os vetores são l.i. (e portanto formam uma base), caso contrário, são l.d. (e portanto, não formam uma base). Escrevemos,

$$a\, w_1 + b\, w_2 + c\, w_3 = \bar{0},$$

que é equivalente a

$$a\,(u_1 + u_2 + u_3) + b\,(u_1 + 2u_2 - u_3) + c\,(2u_1 + u_2 + 6u_3) = \bar{0},$$

ou seja,

$$(a + b + 2c)\,u_1 + (a + 2b + c)\,u_2 + (a - b + 6c)\,u_3 = \bar{0}.$$

Como os vetores u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes,

$$a + b + 2c = 0, \quad a + 2b + c = 0, \quad a - b + 6c = 0.$$

Ou seja, devemos resolver o sistema acima para encontrar as soluções. Temos, da primeira e da segunda equações,

$$b - c = 0, \quad b = c.$$

Portanto, substituindo,

$$a + 3c = 0, \quad a + 5c = 0.$$

Logo $c = 0$ e $a = 0$. Também $b = 0$. Portanto, a única forma de obter o vetor nulo é a trivial e os vetores são l.i.. Portanto os vetores w_1, w_2, w_3 formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Falso: Considere dois planos π e ρ que se interceptam ao longo da reta

$$r\colon \{t\,v,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere que agora um vetor u de π não paralelo a v. Analogamente, seja w um vetor de ρ não paralelo a v. Temos que

$$\alpha = \{u = v_1, v = v_2\}, \quad \tau = \{w = w_1, v = w_2\}$$

são bases de π e ρ. Mas

$$\epsilon = \{v_1, v_2, w_2\} = \{u, v, v\}$$

não é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Verdadeiro: Trata-se da transformação linear nula. Considere qualquer vetor w, veremos que $T(w) = \bar{0}$. Considere qualquer vetor u, então, por hipótese,

$$T(u + w) = T(u) + 2T(w).$$

Mas, como T é linear,

$$T(u+w) = T(u) + T(w).$$

Portanto,

$$T(u) + 2T(w) = T(u) + T(w), \quad T(w) = \bar{0}.$$

Logo T é a transformação linear nula.

2) Considere os vetores

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1,1,0), & v_2 = (2,0,1), & v_3 = (1,-3,2), \\ v_4 = (2,2,0), & v_5 = (3,1,1), & v_6 = (2,3,a). \end{array}$$

2.a) Determine o valor de **a** no vetor v_6 para que os vetores v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 gerem um plano π.

2.b) Usando os vetores do item anterior, determine uma base β do plano π (ou seja os vetores da base são escolhidos entre os vetores $v_1, \dots, v_6$) e determine as coordenadas do vetor $(5,1,2)$ na base β.

2.c) Encontre uma base $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que o vetor $v = (1,2,3)$ tenha coordenadas $(1,2,0)$ na base α.

Resposta:

(2a) Os vetores devem pertencer ao mesmo plano. Observe que v_1 e v_2 não são coplanares. Portanto, determinam um plano cujo vetor normal é $(1,1,0) \times (2,0,1) = (1,-1,-2)$, ou seja o plano

$$\pi\colon x - y - 2z = 0.$$

Veja que os vetores $(1,-3,2)$, $(2,2,0)$, $(3,1,1)$ pertencem ao plano. Finalmente, para o vetor $v_6 = (2,3,a)$ pertencer ao plano π deve verificar a equação cartesiana do mesmo, ou seja

$$2 - 3 - 2a = 0, \quad a = -1/2.$$

Ou de outra forma, o vetor $v_6 = (2, 3, a)$ deve ser combinação linear (por exemplo) dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(2, 0, 1)$, isto é,

$$(2, 3, a) = \lambda(1, 1, 0) + \sigma(2, 0, 1),$$

para certos valores de λ e σ. Portanto,

$$\lambda + 2\sigma = 2, \quad \lambda = 3, \quad \sigma = a.$$

Resolvendo obtemos $\sigma = -1/2 = a$.

(2b) Uma base β do plano é, por exemplo, $\beta = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (2, 0, 1)\}$ (de fato, é suficiente escolher dois vetores não paralelos da coleção $v_1, \dots, v_6$ para obter uma base do plano gerado pelos seis vetores). As coordenadas do vetor $(5, 1, 2)$ na base β são (x, y) onde

$$(5, 1, 2) = x(1, 1, 0) + y(2, 0, 1), \qquad 5 = x + 2y, \quad x = 1, \quad 2 = y.$$

Portanto, as coordenadas do vetor $(5, 1, 2)$ na base β são $(5, 1, 2)_\beta = (1, 2)$.

(2c) Devemos ter

$$(1, 2, 3) = u_1 + 2\,u_2 + 0\,u_3, \quad (1, 2, 3) = u_1 + 2\,u_2,$$

ou seja, os vetores $(1, 2, 3), u_1, u_2$ devem ser coplanares. Escolhemos $u_1 = (1, 0, 0)$ (de fato, temos total liberdade para a escolha do primeiro vetor). Portanto,

$$(1, 2, 3) = (1, 0, 0) + 2\,u_2, \quad u_2 = (0, 1, 3/2).$$

Finalmente, o vetor u_3 deve ser qualquer vetor não coplanar com u_1 e u_2, por exemplo $(0, 0, 1)$. Para ver que os vetores formam de fato uma base veja que

$$(1, 0, 0) \cdot ((0, 1, 3/2) \times (0, 0, 1)) \neq 0.$$

3)

a) Seja w um vetor de $\mathbb{R}^3$ e $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $M(u) = u \times w$. Sabendo que a matriz de M é

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine o vetor w.

b) Considere agora o vetor $v = (1,1,2)$ e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(u) = u \times v.$$

Determine a matriz $[T]$ de T.

Resposta:

(3a) Seja $w = (a, b, c)$. Então temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} \times (a,b,c) &= (0,-c,b) = (0,-2,2),\\
\mathbf{j} \times (a,b,c) &= (c,0,-a) = (2,0,-1)\\
\mathbf{k} \times (a,b,c) &= (-b,a,0) = (-2,1,0).
\end{aligned}$$

Portanto, $a = 1, b = 2, c = 2$, e $w = (1,2,2)$.

Outra forma de resolver o exercício (mais complicada, porém) é observar que $M(w) = 0$, portanto,

$$2b - 2c = 0, \quad -2a + c = 0, \quad 2a - b = 0.$$

Ou seja, o vetor é da forma $(a, 2a, 2a)$. Determinamos a pela condição

$$\mathbf{i} \times (a, 2a, 2a) = (0, -2a, 2a) = (0,-2,2).$$

Logo $a = 1$ e $w = (1,2,2)$.

(3b) Para determinar a matriz de T calculamos

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{i}) &= \mathbf{i} \times (1,1,2) = (0,-2,1),\\
T(\mathbf{j}) &= \mathbf{j} \times (1,1,2) = (2,0,-1)\\
T(\mathbf{k}) &= \mathbf{k} \times (1,1,2) = (-1,1,0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Considere a projeção P no plano $2x + y - z = 0$ na direção do vetor $(1,1,1)$.

(a) Determine a matriz de P.

(b) Encontre a equação cartesiana de um plano cuja imagem pela transformação P seja a reta $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Resposta:

(4a) Observe que $P(a, b, c)$ é obtido como segue:

- Considere a reta r contendo o ponto (a, b, c) e paralela ao vetor $(1, 1, 1)$,

$$r\colon (a + t, b + t, c + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Determine a interseção de r e π:

$$2(a + t) + (b + t) - (c + t), \quad t = (-2a - b + c)/2.$$

Portanto, a interseção da reta e o plano ocorre no ponto

$$\left(\frac{(-b + c)}{2}, \frac{(-2a + b + c)}{2}, \frac{(-2a - b + 3c)}{2}\right).$$

Temos, portanto,

$$P(a, b, c) = \left(\frac{(-b + c)}{2}, \frac{(-2a + b + c)}{2}, \frac{(-2a - b + 3c)}{2}\right).$$

Portanto,

$$P(\mathbf{i}) = (0, -1, -1), \quad P(\mathbf{j}) = (-1/2, 1/2, -1/2), \quad P(\mathbf{k}) = (1/2, 1/2, 3/2).$$

Logo,

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Verifique que $P(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Escolha dois vetores não paralelos do plano, por exemplo, $(0, 1, 1)$ e $(1, 0, 2)$ e veja que $P(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$ e $P(1, 0, 2) = (1, 0, 2)$.

Outra forma de resolver o exercício é escolher uma base de vetores cujas imagens são já conhecidas (dois vetores do plano de projeção, transformados neles próprios, e um vetor paralelo à direção de projeção, transformado no vetor nulo):

$$P(1,1,1)=(0,0,0), \quad P(0,1,1)=(0,1,1), \quad P(1,0,2)=(1,0,2).$$

Portanto,

$$P(1,0,0)=P(1,1,1)-P(0,1,1)=(0,-1,-1).$$

Também temos:

$$P(0,0,2)=-P(1,0,0)+(1,0,2)=(1,1,3), \quad P(0,0,1)=(1/2,1/2,3/2).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(0,1,0) &= P(0,1,1)-P(0,0,1)=(0,1,1)-(1/2,1/2,3/2)= \\ &= (-1/2,1/2,-1/2). \end{aligned}$$

(4b) Observe que a reta está contida no plano de projeção. Observe também que $P(1,-1,1)=(1,-1,1)$ (onde $(1,-1,1)$ é o vetor diretor da reta). Observe que $P(1,1,1)=(0,0,0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} P(t(1,-1,1)+s(1,1,1)) &= t\,P(1,-1,1)+s\,P(1,1,1)= \\ &= t\,P(1,-1,1)=(t,-t,t). \end{aligned}$$

Ou seja, o plano π gerado pelos vetores $(1,1,1)$ e $(1,-1,1)$ é transformado na reta $(t,-t,t)$. Ou seja, $\pi\colon x-z=0$.

5) Considere os pontos $A=(1,1)$ e $B=(3,4)$ de $\mathbb{R}^2$. Determine um ponto C tal que A,B e C sejam os vértices de um triângulo equilátero.

Resposta: Se os vértices fossem a origem e um ponto $A=(a,b)$, o terceiro vértice seria obtido rotando o ponto A por uma rotação de 60 graus (correspondente ao ângulo de um triângulo equilátero).

Portanto, para determinar o triângulo, **1)** transladaremos um dos vértices ao origem, por exemplo, o ponto $(1,1)$ (o outro vértice é transladado ao ponto $(2,3)$, **2)** construiremos então o triângulo equilátero com vértices $(0,0)$ e $(2,3)$, e **3)** desfaremos a translação (somaremos o vetor $(1,1)$ aos dois vértices).

Para o passo (2),

$$\begin{pmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3} + 3/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, fazendo o terceiro passo, temos que o terceiro vértice é

$$(1 - 3\sqrt{3}/2 + 1, \sqrt{3} + 3/2 + 1) = (2 - 3\sqrt{3}/2, \sqrt{3} + 5/2).$$

6) Determine **a**, **b** e **c** para que a matriz $[P]$ represente uma projeção em uma reta.

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 1 & c \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determine a reta e a direção de projeção (isto é, a equação cartesiana do plano que dá a direção de projeção na reta).

Resposta: Para que a matriz $[P]$ represente uma projeção em uma reta os vetores $P(\mathbf{i})$, $P(\mathbf{j})$, $P(\mathbf{k})$ devem ser necessariamente múltiplos do vetor diretor da reta. No nosso caso, a única possibilidade é ser paralelos ao vetor $P(\mathbf{i}) = (1, -1, -1)$. Portanto, $a = -1$ e $b = 1$ e $c = -1$.

O argumento anterior implica que a reta de projeção é $(t, -t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que $P(1, -1, -1) = (1, -1, -1)$.

Para determinar o plano π que dá a direção de projeção temos duas possibilidades. A primeira é observar que um vetor v é paralelo a π se, e somente se, $P(v) = \bar{0}$. Portanto os vetores do plano π verificam $P(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Em coordenadas,

$$x - y + z = 0, \quad -x + y - z = 0, \quad -x + y - z = 0.$$

Portanto, o plano é $x - y + z = 0$.

Outra forma é observar que os vetores

$$P(\mathbf{i}) - \mathbf{i}, \quad P(\mathbf{j}) - \mathbf{j}, \quad P(\mathbf{k}) - \mathbf{k},$$

são paralelos ao plano π. Portanto

$$(0, -1, -1), \quad (-1, 0, 1) \quad (1, -1, -2)$$

são vetores paralelos ao plano π. Agora, usando produto vetorial, por exemplo, obtemos a equação cartesiana de π (obviamente, a obtida anteriormente).