Prova tipo D

P2 de Álgebra Linear I – 2004.2

Data: 8 de outubro de 2004.

Gabarito

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

1.a) Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0,1) = (2,1,1), \quad T(0,1,1) = (3,1,1), \quad T(2,2,4) = (10,4,4).$$

1.b) Considere o vetor $(1,1,1)$ e a transformação

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times (1,1,1) + v \times v.$$

A transformação T é linear.

1.c) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (2,1,a), \quad v_3 = (3,1,a).$$

Os vetores v_1, v_2 e v_3 são sempre linearmente independentes, independentemente do valor de $a \in \mathbb{R}$.

1.d) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação afim

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(v) = L(v) + b,$$

onde L é uma transformação linear inversível, $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, e b é um vetor de $\mathbb{R}^2$.

Então T é inversível e sua inversa é

$$T^{-1} = L^{-1} - b.$$

1.e) Seja M uma matriz quadrada 2×2 tal que

$$M^2 = M \circ M = M.$$

Então, pelas propriedades dos determinantes

$$\det(M^2) = \det(M \circ M) = \det(M)\ \det(M) = \det(M),$$

onde $\det(M)$ denota o determinante de uma matriz quadrada M. Simplificando, (dividindo por $\det(M)$),

$$\det(M) = 1 \neq 0,$$

portanto M tem inversa.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b	x		
1.c	x		
1.d		x	
1.e		x	

---

2)

(a) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(0,1,1); (1,1,0); (1,0,1)\}$$

Determine as coordenadas $(v)_\beta$ do vetor $v = (4,4,2)$ na base β.

(b) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta = \{u_1 + u_3, u_1 + u_2, u_2 + u_3\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(w)_\alpha = (3, 3, 4),$$

determine as coordenadas $(w)_\delta$ de w na base δ.

(c) Determine k para que os vetores

$$\{(2, 1, 1); (1, k, 2); (k, 3, k)\}$$

não formem uma base de $\mathbb{R}^3$.

a) $\boxed{(v)_\beta = (1, 3, 1).}$

b) $\boxed{(w)_\delta = (2, 1, 2).}$

c) $\boxed{k = \dfrac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}.}$

---

3) Considere o vetor $(2, 1, 3)$ e a transformação linear

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times (2, 1, 3).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine (explicitamente) dois vetores não nulos e diferentes u e w de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$T(u) = T(w) \neq \bar{0}.$$

(c) Determine a equação cartesiana da imagem de T (denotada $\mathrm{im}(T)$). Lembre que

$$\mathrm{im}(T) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(w) = u\}.$$

a)

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$u =$ não paralelo a $(2,1,3)$ e $u \neq \bar{0}$ e $\quad w = u + t\,(2,1,3), t \neq 0.$

c)

$\mathrm{im}\,(T)\colon 2\,x + y + 3\,z = 0.$

---

4)

(a) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sejam $B = A^2$ e C a matriz inversa de B, (isto é $C = B^{-1}$). Suponha que

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Determine o coeficiente $c_{3,1}$ da matriz C.

Resposta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$c_{3,1} = 2.$$

---

(5) Considere a reta r de $\mathbb{R}^2$ de equação cartesiana

$$r\colon y = 2\,x + 1$$

e o vetor $v = (1, 1)$.

Considere a transformação afim T *projeção na reta* r *na direção do vetor* v, que associa ao vetor $w = \overline{OP}$ o vetor $T(w) = \overline{OQ}$, onde Q é a interseção da reta r e da reta s que contém o ponto P e é paralela ao vetor $v = (1, 1)$.

(a) Determine a parte linear L_T de T.

(b) Determine a forma matricial de T.

Resposta:

a)

$$[L_T] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$[T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$