Prova tipo A

P2 de Álgebra Linear I – 2004.2

Data: 8 de outubro de 2004.

Gabarito

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

1.a) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (2,1,a), \quad v_3 = (3,1,a).$$

Os vetores v_1, v_2 e v_3 são sempre linearmente independentes, independentemente do valor de $a \in \mathbb{R}$.

1.b) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação afim

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(v) = L(v) + b,$$

onde L é uma transformação linear inversível, $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, e b é um vetor de $\mathbb{R}^2$.

Então T é inversível e sua inversa é

$$T^{-1} = L^{-1} - b.$$

1.c) Seja M uma matriz quadrada 2×2 tal que

$$M^2 = M \circ M = M.$$

Então, pelas propriedades dos determinantes

$$\det(M^2) = \det(M \circ M) = \det(M)\ \det(M) = \det(M),$$

onde $\det(M)$ denota o determinante de uma matriz quadrada M. Simplificando, (dividindo por $\det(M)$),

$$\det(M) = 1 \neq 0,$$

portanto M tem inversa.

1.d) Existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0,1) = (2,1,1), \quad T(0,1,1) = (3,1,1), \quad T(2,2,4) = (10,4,4).$$

1.e) Considere o vetor $(1,1,1)$ e a transformação

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times (1,1,1) + v \times v.$$

A transformação T é linear.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	x		
1.b		x	
1.c		x	
1.d		x	
1.e	x		

(a) $\boxed{\text{Verdadeiro}}$

Para ver se os vetores são linearmente independentes devemos calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = 1\,(a-a) - 2\,(0-1) + 3(1-0) = 1 \neq 0.$$

Logo o determinante é sempre não nulo, independentemente do valor de a. Portanto, os vetores são sempre linearmente independentes.

(b) $\boxed{\text{Falso}}$

Sabemos que a inversa de T é uma transformação afim da forma

$$T^{-1} = L^{-1} + c.$$

Determinemos c pela condição $T^{-1} \circ T = Id$:

$$\begin{aligned} v &= (L^{-1} + c)((L + b)(v)) = (L^{-1} + c)(L(v) + b) = L^{-1}(L(v) + b) + c = \\ &= L^{-1}(L(v) + L^{-1}(b) + c = v + L^{-1}(b) + c. \end{aligned}$$

Portanto, c está determinado pela condição:

$$c = -L^{-1}(b),$$

que é em geral diferente de $-b$. Por exemplo, dada a transformação afim

$$[T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$[L] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$L^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$[T^{-1}]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $\boxed{\text{Falso}}$

A matriz M poderia ter determinante nulo. A simplificação somente faz sentido quando $\det(M) \neq 0$. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tem determinante nulo e, portanto, não é inversível.

(d) $\boxed{\text{Falso}}$

Os vetores $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ e $(2,2,4)$ são coplanares (pertencem ao plano $x+y-z=0$). A condição

$$T(2,2,4) = (10,4,4)$$

é consequência de

$$T(1,0,1) = (2,1,1), \qquad T(0,1,1) = (3,1,1)$$

pois

$$\begin{aligned} T(2,2,4) &= T(2\,(1,0,1) + 2\,(1,0,1)) = 2\,T(1,0,1) + 2\,T(1,0,1)) = \\ &= 2\,(2,1,1) + 2\,(3,1,1) = (10,4,4). \end{aligned}$$

Por exemplo as transformações lineares cujas matrizes são

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verificam as hipóteses do enunciado.

(e) $\boxed{\text{Verdadeiro}}$

Como $v \times v = \bar{0}$, temos

$$T(v) = v \times (1,1,1),$$

que é uma transformação linear pelas propriedades do produto vetorial.

---

2)

(a) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,1,0); (1,0,1); (0,1,1)\}$$

Determine as coordenadas $(v)_\beta$ do vetor $v = (4,2,0)$ na base β.

(b) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta = \{u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_1\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(w)_\alpha = (3, 3, 4),$$

determine as coordenadas $(w)_\delta$ de w na base δ.

(c) Determine k para que os vetores

$$\{(1, 2, 1); (2, k, 1); (k, 3, k)\}$$

não formem uma base de $\mathbb{R}^3$.

a) $\boxed{(v)_\beta = (3, 1, -1)}$

b) $\boxed{(w)_\delta = (1, 2, 2)}$

c) $\boxed{k = 3/2}$

(a) Escreva

$$(4, 2, 0) = x\,(1, 1, 0) + y\,(1, 0, 1) + z\,(0, 1, 1).$$

Em coordenadas,

$$4 = x + y, \quad 2 = x + z, \quad 0 = y + z.$$

Portanto $z = -y$,

$$4 = x + y, \quad 2 = x - y, \quad 6 = 2\,x, \quad x = 3.$$

Logo

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = -1.$$

Portanto,

$$(v)_\beta = (3, 1, -1).$$

(b) Sejam $(w)_\delta = (x, y, z)$ as coordenadas de w na base δ. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= x\,(u_1 + u_2) + y\,(u_2 + u_3) + z\,(u_3 + u_1) = \\ &= (x + z)\,u_1 + (x + y)\,u_2 + (y + z)\,u_3. \end{aligned}$$

Como, por hipótese as coordenas de w na base α são $(3, 3, 4)$,

$$w = 3\,u_1 + 3\,u_2 + 4\,u_3$$

e as coordenadas de um vetor em uma base (no caso na base α) são únicas:

$$3 = x + z, \quad 3 = x + y, \quad 4 = y + z.$$

Portanto,

$$z - y = 0, \quad z = y, \quad z = y = 2, \quad x = 1.$$

Logo

$$(w)_\delta = (1, 2, 2).$$

(c) Para que os vetores não formem uma base não devem ser linearmente independentes. Ou seja,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k^2 - 3) - 2\,(2\,k - 3) + k\,(2 - k) = -2\,k + 3 = 0.$$

Portanto,

$$k = 3/2.$$

---

3) Considere o vetor $(1, 2, 3)$ e a transformação linear

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times (1, 2, 3).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine (explicitamente) dois vetores não nulos e diferentes u e w de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$T(u) = T(w) \neq \bar{0}.$$

(c) Determine a equação cartesiana da imagem de T (denotada $\mathrm{im}(T)$). Lembre que

$$\mathrm{im}(T) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(w) = u\}.$$

a)

$$\boxed{[T] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

b)

$$\boxed{u = \text{não paralelo a } (1,2,3) \text{ e } u \neq \bar{0} \text{ e } \quad w = u + t\,(1,2,3), t \neq 0.}$$

c)

$$\boxed{\mathrm{im}\ (T)\colon x + 2\,y + 3\,z = 0.}$$

Observe que

$$T(x,y,z) = (x,y,z) \times (1,2,3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3\,y - 2\,z, z - 3\,x, 2\,x - y).$$

Portanto,

$$T(1,0,0) = (0,-3,2), \quad T(0,1,0) = (3,0,-1), \quad T(0,0,1) = (-2,1,0).$$

Logo
$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere qualquer vetor não nulo w não paralelo a $(1,2,3)$. Então $T(w) \neq \bar{0}$. Considere
$$u = w + (1,2,3).$$
Observe que
$$T(1,2,3) = (1,2,3) \times (1,2,3) = \bar{0}.$$
Portanto,
$$T(u) = T(w) + T(1,2,3) = T(w) \neq \bar{0}.$$
Em geral, é suficiente escolher w e u não nulos e não paralelos a $(1,2,3)$ e tais que $w - u = \lambda\,(1,2,3)$, $\lambda \neq 0$. Por exemplo,
$$w = (1,1,1) \qquad u = (2,3,4) = (1,1,1) + (1,2,3).$$

Veja que, por definicção, os vetores $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$ são ortogonais a $(1,2,3)$ e não são paralelos. Portanto, eles geram o plano π de equação cartesiana
$$\pi\colon x + 2\,y + 3\,z = 0,$$
que é a imagem de T.

---

4)

(a) Determine a inversa da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sejam $B = A^2$ e C a matriz inversa de B, (isto é $C = B^{-1}$). Suponha que

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Determine o coeficiente $c_{1,2}$ da matriz C.

Resposta:

Utilizaremos o método de Gauss para o cálculo da matriz inversa.

Início:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: (II-linha) $-$ (I-linha) e (III-linha) $-\ 2$ (I-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: $-$(II-linha) e $-$(III-linha) (trocas de sinal)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Operações: (III-linha) -3 (II-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

Operações: $1/2$ (III-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

Operações: (I-linha) $-$ 2 (II-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

Operações: (I-linha) $-$ (III-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Observe que se $B = A^2$ então $B^{-1} = A^{-1}\, A^{-1} A^{-1}\, A^{-1}$:

$$A^2\,(A^{-1}\,A^{-1}) = A\,\underbrace{A\,A^{-1}}_{Id}\,A^{-1} = A\,Id\,A^{-1} = A\,A^{-1} = Id.$$

Portanto

$$C = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Temos

$c_{1,2} = ((-1/2)\,(1/2)) + ((1/2)\,(-1)) + ((1/2)\,(3/2)) = -1/4 - 1/2 + 3/4 = 0.$

---

(5) Considere a reta r de $\mathbb{R}^2$ de equação cartesiana

$$r\colon y = 3\,x + 1$$

e o vetor $v = (1,1)$.

Considere a transformação afim T *projeção na reta* r *na direção do vetor* v, que associa ao vetor $w = \overline{OP}$ o vetor $T(w) = \overline{OQ}$, onde Q é a interseção da reta r e da reta s que contém o ponto P e é paralela ao vetor $v = (1,1)$.

(a) Determine a parte linear L_T de T.

(b) Determine a forma matricial de T.

Resposta:

Observe que a parte linear L_T de T é a projeção na reta $y = 3\,x$ na direção do vetor $(1,1)$. Portanto,

$$L_T(1,1) = (0,0), \qquad L_T(1,3) = (1,3).$$

Logo

$$L_T(1,3) - L_T(1,1) = L_T(0,2) = (1,3).$$

Portanto,

$$L_T(0,1) = (1/2, 3/2).$$

Também temos

$$L_T(1,0)+L_T(0,1) = L_T(1,1) = (0,0), \quad L_T(1,0) = -L_T(0,1) = (-1/2,-3/2).$$

Portanto

$$[L_T] = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Para determinar $T(\bar{0})$ calculamos a interseção da reta (t,t), $t \in \mathbb{R}$ (paralela ao vetor $(1,1)$ contendo a origem) e a reta r. Esta interseção ocorre quando

$$t = 3\,t + 1, \quad t = -1/2.$$

Portanto, o ponto de interseção é

$$(-1/2, -1/2).$$

Portanto,

$$[T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Outra forma de calcular T é usando geometria analítica e a definição de T. Para determinar $T(a,b)$ devemos calcular a interseção das retas

$$(a+t, b+t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e $y = 3\,x + 1$. A interseção ocorre quando

$$b + t = 3\,(a + t) + 1, \quad -2\,t = 3\,a - b + 1, \quad t = -(3/2)\,a + (b/2) - 1/2.$$

Portanto, o ponto de interseção é:

$$(a - (3/2)\,a + (b/2) - 1/2, b - (3/2)\,a + (b/2) - 1/2) = (-a/2 + b/2, -3\,a/2 + 3\,b/2) + (-1/2, -1/2).$$

Agora é imediato obter a expressão matricial acima.